Deug II, Epreuve finale de Microéconomie

Nicolas Gravel, Université de la Méditerranée

jeudi le 9 janvier 2003

Directives pédagogiques:

Cette épreuve, d'une durée maximale de trois heures, se compose de 14 questions dites "à choix multiples" et de deux questions dites "à développement". La contribution de chacune des composantes de l'épreuve à la note finale est indiquée ci-dessous. On répond à chaque question à choix multiples en portant sur la feuille d'examen l'**unique** lettre correspondant à l'**unique** énoncé qui paraît le mieux répondre à la question posée. On vous conseille de bien lire les questions avant d'y répondre et de répondre d'abord à celles qui vous paraissent les plus faciles. Bonne chance!

Questions à choix multiples (1 point par question)

Question 1: Lequel des énoncés suivant est **faux ?**

(a) Si la technologie d'une entreprise est représentée par une fonction de production $f(x_1, x_2) = \sqrt[2]{\min(2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)}$**, alors cette technologie fait l'objet de rendements d'échelle croissants.**

(b) Si la technologie d'une entreprise est représentée par une fonction de production $f(x_1, x_2) = x_1 + \min(x_1, x_2)$, alors cette technologie fait l'objet de rendements d'échelle constants.

(c) Si une technologie fait l'objet de rendements d'échelle constants, alors doubler simultanément le niveau d'utilisation de tous les inputs va conduire au doublement de l'output produit.

(d) La technologie décrite par la fonction de production $f(x_1, x_2) = 10 - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$ fait localement l'objet de rendements d'échelle constants lorsque les inputs sont utilisés aux niveaux $(x_1, x_2) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$.

(e) Une entreprise à but lucratif dotée d'une technologie faisant l'objet de rendements d'échelles constants et qui décide de produire fait forcément des profits économiques nuls.

Question 2. Laquelle des affirmations suivantes est **vraie** ?

(a) L'hypothèse suivant laquelle une entreprise à but lucratif évoluant dans un environnement concurrentiel maximise ses profits sous une contrainte technologique donnée est réfutable au sens de Popper.

(b) Le critère de réfutabilité de Popper affirme qu'une proposition qui n'a pas été vérifiée empiriquement n'est pas scientifique.

(c) Le critère de réfutabilité de Popper affirme qu'une proposition qui ne peut pas être réfutée par l'expérience ou la vérification empirique n'est pas scientifique.

(d) L'énoncé "Le rêve résulte de l'action de l'inconscient sur la vie psychique consciente" n'est pas réfutable au sens de Popper.

(e) Aucune des précédentes.

Question 3: Une entreprise à but lucratif qui maximise ses profits dispose d'une technologie représentée par la fonction de production $f(x_1, x_2) = \sqrt[2]{\min(x_1, x_2)}$. Nous pouvons en déduire que:

(a) La fonction de profit de l'entreprise est $\pi(p_y, p_1, p_2) = \sqrt[2]{\min(\frac{p_y^2}{4p_1}, \frac{p_y^2}{4p_2})}$.

(b) La fonction de profit de l'entreprise est $\pi(p_y, p_1, p_2) = p_y \sqrt[2]{\min(\frac{p_y^2}{4p_1^2}, \frac{p_y^2}{4p_2^2})} - \frac{p_y^2}{4p_1} - \frac{p_y^2}{4p_2}$.

(c) La fonction de profit n'est pas définie car les rendements d'échelle sont décroissants.

(d) La fonction de profit de l'entreprise est $\pi(p_y, p_1, p_2) = \frac{p_y^2}{4(p_1+p_2)}$.

(e) Aucune des précédentes.

Question 4: Loana gère une usine de fabrication de tongues. Elle produit 50 tongues par jour, en utilisant du travail et du caoutchouc. Ce niveau d'output, ainsi que le choix de l'activité productive qui permet de l'atteindre, résulte d'une maximisation de profit. Elle peut employer toute la main d'oeuvre qu'elle désire à un coûts de 20 centimes d'euros par minute. Elle peut également utiliser toute le caoutchouc qu'elle désire en payant 10 centime d'euros par 100g. Elle utilise les deux inputs en quantité positive et les courbes isoquantes qui représentent sa technologies sont dérivables partout. Nous pouvons déduire de ces informations que:

(a) Le produit marginal de 100g de caoutchouc est deux fois plus élevé que le produit marginal d'une minute de travail.

(b) Le produit marginal d'une minute de travail est deux fois plus élevé que le produit marginal de 100g de caoutchouc

(c) Les produits marginaux des deux facteurs sont égaux.

(d) On ne dispose pas d'une information suffisante pour déterminer les rapports des produits marginaux.

(e) La somme des produits marginaux des deux facteurs doit égaler $\frac{50}{20+10}$.

Question 5. Une entreprise concurrentielle utilise trois facteurs de production pour produire un output selon une technologie décrite par la fonction de production $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^{\frac{1}{2}} x_3^{\frac{1}{3}}$. Les prix des facteurs sont initialement de $p_1 = 1$, $p_2 = 2$ et $p_3 = 3$. Si le prix du facteur 2 double et que le prix de chaque autre facteur reste inchangé, nous pouvons en déduire que le coût de production que supportera la firme qui maximise ses profits:

(a) doublera.

(b) aumentera de plus de 10% mais de moins que 50%.

(c) augmentera de 50%.

(d) augmentera de plus de 50% mais ne doublera pas.

(e) restera le même.

Question 6. Laquelle des affirmations suivantes est **vraie** ?

(a) Si une technologie admet des rendements d'échelle partout croissants, il existe au moins un facteur de production pour lequel la “loi des rendements décroissants” n'st pas vérifiée.

(b) Si une technologie a des ensembles d'input requis à la production de tout niveau d'output qui sont convexes, la fonction de production qui représente cette technologie est forcément concave.

(c) Si une technologie satisfait la “loi des rendements décroissants” par rapport à tout facteur de production, cette technologie implique forcément que l'ensemble des inputs requis pour la production de tout niveau d'output soit convexe.

(d) Si les isoquantes associées à une technologie sont des droites, alors la technologie fait l'objet de rendements d'échelle constants.

(e) Aucune des précédentes.

Question 7 Laquelle des affirmations suivantes est **vraie** ?

(a) Les profits comptables ne sont jamais plus faibles que les profits économiques.

(b)Un propriétaire d'une entreprise qui y travaille à temps plein, qui pourrait gagner au maximum 35000 euros paran s'il se salariait dans une autre entreprise et qui a investi dans son entreprise 150 000 euros va, si le taux d"intérêt annuel est de 10%, rationellement rester en opération dans le long terme si les profits comptables qu'il réalise sont de 50 000 euros.

(c) Une entreprise à but lucratif qui fait partout l'objet de rendements d'échelle croissants va toujours souhaiter fermer boutique dans le long terme.

(d) Le taux marginal de substitution technique entre deux facteurs est toujours, en valeur absolue, croissant le long d'une isoquante si la technologie est représentée par une fonction de production quasi-concave.

(e) Aucune des précédentes.

Question 8 Une entreprise qui emploie deux facteurs de production a une technologie de long terme représentée par la fonction de production $f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{2}{3}} + x_1 x_2^{\frac{1}{2}}$. Nous pouvons déduire de cette information que:

(a) La fonction de production n'est pas concave mais satisfait la loi des rendements décroissants et les ensembles d'inputs requis à la production de tout niveau d'output sont convexes.

(b) La fonction de production est concave, satisfait la loi des rendements décroissants et les ensembles d'inputs requis à la production de tout niveau d'output sont convexes.

(c) La fonction de production n'est pas concave mais satisfait la loi des rendements décroissants et les ensembles d'inputs requis à la production de tout niveau d'output ne sont pas convexes.

(d) La fonction de production n'est pas concave, ne satisfait pas la loi des rendements décroissants et les ensembles d'inputs requis à la production de tout niveau d'output ne sont pas convexes.

(e) Aucune des précédentes.

Question 9 Laquelle des affirmations suivantes est **vraie ?**

(a) L'axiome de la profitabilité révélée implique que si une activité productive a réalise moins de profits qu'une activité productive b à une configuration de prix où b a été choisie, alors a ne doit jamais être choisi.

(b) L'axiome de la profitabilité révélée implique que si les activités productives a et b ont été choisies à différentes configuration de prix, alors les profits qu'obtient l'entreprise aux prix où elle a choisi a doivent être plus élevé avec a qu'avec b

(c) Si les fonctions de demandes et d'offre de l'entreprise sont dérivables et homogènes de degré 0 par rapport aux prix, la symmétrie et le caractère semi-défini positif de la matrice Hessienne de la fonction de profit sont impliqués par l'axiome de la profitabilité révélée mais n'impliquent pas cet axiome.

(d) Si les fonctions de demandes et d'offre de l'entreprise sont dérivables et homogènes de degré 0 par rapport aux prix, l'axiome de la profitabilité révélée implique la symmétrie et le caractère semi-défini positif de la matrice Hessienne de la fonction de profit mais la réciproque est fausse.

(e) Aucune des précédentes

Question 10 On considère le tableau suivant qui décrit, sur trois périodes successives, les comportements d'embauche de deux inputs et de production d'un output d'une entreprise confrontés à différents niveaux de prix:

période	y	x_1	x_2	p_y	p_1	p_2
1	3	1	2	1	2	1/2
2	4	3	0	3	4	3
3	5	2	4	5	7	2

A partir de ce tableau, nous pouvons conclure que:
(a) Le comportement de cette entreprise satisfait l'axiome de la profitabilité révélée et peut résulter d'une maximisation de profits
(b) Ce comportement de cette entreprise ne peut résulter d'une maximisation de profits sous une contrainte technologique car il implique la possibilité de produire de l'output sans utiliser d'input 2
(c) S'il existe une technologie sous la contrainte de laquelle cette entreprise maximise son profit, cette technologie n'est par représentée par une fonction de production quasi-concave
(d) Ce comportement ne peut résulter d'une maximisation de profits sous contrainte technologique car il montre que l'entreprise augmente son embauche de facteur 1 entre la période 1 et 2 alors que le prix de ce facteur a augmenté.
(e) Aucune des précédentes.

Question 11. Une entreprise concurrentielle à but lucratif dans le court terme produit un output au moyen de trois facteurs fixes et d'un facteur variable. La fonction de production de court terme de l'entreprise est donnée par $y = 400x - 2x^2$ où x désigne la quantité de facteur variable utilisé. Le prix de l'output est de 2 euros et le prix du facteur variable est de 40 euros. Dans le court terme, combien d'unités de facteurs variables l'entreprise utilisera t-elle ?
(a) 31,66
(b) 80
(c) 200
(d) 95
(e) Aucune des précédentes.

Question 12. Une entreprise concurrentielle à but lucratif produit un output avec deux inputs, dont les quantités sont désignées par x_1 et x_2. La fonction de production est donnée par $y = \sqrt[2]{x_1 + x_2}$ où y désigne le nombre d'unités d'ouptut produites. Les prix des facteurs sont p_1 et p_2 et le prix de l'output est p_y. Nous pouvons déduire de ces informations que
(a) Quelques soient les prix, l'entreprise choisira toujours d'employer les deux facteurs de manière telle que $x_1 = x_2$
(b) La technologie fait l'objet de rendements constants.
(c) Si $p_1 > p_2$, l'entreprise n'emploira pas de facteur 1.
(d) Si $p_1 > p_2$, l'entreprise n'emploira pas de facteur 2.
(e) Aucune des précédentes.

Question 13 Une entreprise concurrentielle produit un output avec deux inputs au moyen d'une technologie de type Leontieff représentée par la fonction de production $y = \min(x_1, x_2)$. Le prix du facteur 1 est de 5 et le prix du facteur 2 est de 9. A cause d'une capacité de stockage limitée, l'entreprise ne peut pas utiliser plus de 18 unités de facteur 1. L'entreprise doit payer une note d'électricité de 3 si elle produit la moindre unité d'output mais ne paie pas d'électricité si elle choisit de ne pas produire. Sa note d'électricité est indépendante du nombre d'unités d'output produite. Quel est le plus petit prix entier de l'output qui inciterait l'entreprise à choisir de produire ?
(a) 9
(b) 20
(c) 14
(d) 24
(e) 15

Question 14 Laquelle des affirmations suivantes est **fausse** ?

(a) La distinction que fait l'économiste entre le long terme et le court terme réside dans le fait que certaines quantités d'input ne peuvent être variées dans le court terme alors que les quantités de tous les inputs peuvent l'être dans le long terme.

(b) Si la fonction de production est $f(x_1,x_2) = \min(2x_1+x_2, x_1+2x_2)$, alors les rendements d'échelle sont constants.

(c) Il est possible d'avoir la loi des rendements décroissants satisfaite pour tous les inputs tout en ayant des rendements d'échelle croissants.

(d) La fonction de production $f(x_1,x_2) = x_1^{\frac{2}{3}} + x_2^{\frac{2}{3}}$ fait l'objet de rendements d'échelles croissants.

(e) La fonction implicite qui décrit une isoquante représentative d'une technologie représentée par la fonction de production $f(x_1,x_2) = x_1^{\frac{2}{3}} + x_2^{\frac{2}{3}}$ est donnée par $x_2^{\overline{y}}(x_1) = (\overline{y} - \overline{x}_1^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

Questions à développement (6 points)

Question 1 (3 points) Donner la liste de toutes les implications observables de l'hypothèse de maximisation des profits de la part d'une entreprise évoluant en environnement concurrentiel et soumise à une contrainte technologique invariante et commenter avec le plus grand soin votre réponse (une attention toute particulière sera accordée par le correcteur à la qualité de l'argumentation).

Réponse: Si l'on suppose que l'observateur du comportement d'emploi de facteurs et de production d'output (en fonction des prix) de l'entreprise peut exprimer sous la forme de fonctions de demandes et d'offres dérivables, la liste des implications observables de l'hypothèse de maximisation des profits de la firme (sous la donnée des prix et d'une contrainte technologique invariante) consiste en l'homogénéité de degré 0 des fonctions de demandes et d'offre et dans la symmétrie et le caractère semi défini positif de la matrice des effets prix :

$$\begin{matrix} \frac{\partial y(p_y,p_1,\ldots,p_n)}{\partial p_y} & \frac{\partial y(p_y,p_1,\ldots,p_n)}{\partial p_1} & \ldots & \frac{\partial y(p_y,p_1,\ldots,p_n)}{\partial p_n} \\ \frac{-\partial x_1(p_y,p_1,\ldots,p_n)}{\partial p_y} & \frac{-\partial x_1(p_y,p_1,\ldots,p_n)}{\partial p_1} & \ldots & \frac{-\partial x_1(p_y,p_1,\ldots,p_n)}{\partial p_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{-\partial x_n(p_y,p_1,\ldots,p_n)}{\partial p_y} & \frac{-\partial x_n(p_y,p_1,\ldots,p_n)}{\partial p_1} & & \frac{-\partial x_n(p_y,p_1,\ldots,p_n)}{\partial p_n} \end{matrix}$$

qui se trouve à être, du fait du lemme d'Hotelling, la matrice Hessienne de la fonction de profits.

(Les étudiants doivent faire quelques commentaires sur l'interprétation économique des propriétés (par exemple,le fait qu'elle implique $\frac{\partial y(p_y,p_1,\ldots,p_n)}{\partial p_y} \geq 0$ et $\frac{\partial x_j(p_y,p_1,\ldots,p_n)}{\partial p_j} \leq 0$ pour tout facteur de production j et que les effets prix croisés soient égaux). Pour avoir tous leurs points, les étudiants doivent dire pourquoi l'homogénéité de degré 0 des fonctions de demandes et d'offre et dans la symmétrie et le caractère semi défini positif de la matrice des effets prix constitue la seule implication observable de l'hypothèse de maximisation des profits (au sens où il n'y a aucune perte de généralité à supposer d'une firme dont le comportement d'embauche et de production se traduit par des fonctions d'offre de produit et de demande de facteur homogène de degré 0 et admettant une matrice d'effet prix symmétrique et semie-définie positive qu'elle maximise son profit). Enlever 1/2 point à tout étudiant qui ne dit pas quelque chose qui ressemble a cela.

Alternativement, les étudiants peuvent évoquer comme seule implication observable de l'hypothèse de maximisation des profits l'axiome de la profitabilité révélée dont ils doivent alors donner un énoncé précis et correct. Dans ce cas également, les étudiants doivent dire que l'axiome de la profitabilité révélé constitue l'unique implication observable de l'hypothèse de maximisation des profits sous contrainte technologique invariante et sous la donnée d'une liste de prix.

Exercice 2 (3 points) On vous donne une technologie d'une entreprise produisant un output au moyen d'un input représentée par la fonction de production $f(x_1,x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} + 2x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{\frac{1}{4}}$

(a) Evaluer l'élasticité d'échelle de cette fonction de production au niveau d'emploi des inputs $(x_1, x_2) = (1, 1)$ (1/2 point) et caractériser de manière globale, en le justifiant, les rendemens d'échelle dont cette technologie fait l'objet (1/2 point)

Réponse: Calcul de l'élasticité d'échelle en un point $(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ donné:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{\frac{\partial f(\overline{x}_1,\overline{x}_2)}{\partial x_1}\overline{x}_1 + \frac{\partial f(\overline{x}_1,\overline{x}_2)}{\partial x_2}\overline{x}_2}{f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)} = \frac{(\frac{1}{2}\overline{x}_1^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{2}\overline{x}_1^{\frac{-3}{4}}\overline{x}_2^{\frac{1}{4}})\overline{x}_1 + (\frac{1}{2}\overline{x}_2^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{2}\overline{x}_1^{\frac{1}{4}}\overline{x}_2^{\frac{-31}{4}})\overline{x}_2}{\overline{x}_1^{\frac{1}{2}} + \overline{x}_2^{\frac{1}{2}} + 2\overline{x}_1^{\frac{1}{4}}\overline{x}_2^{\frac{1}{4}}} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\overline{x}_1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\overline{x}_1^{\frac{1}{4}}\overline{x}_2^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\overline{x}_1^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\overline{x}_1^{\frac{1}{4}}\overline{x}_2^{\frac{1}{4}}}{\overline{x}_1^{\frac{1}{2}} + \overline{x}_2^{\frac{1}{2}} + 2\overline{x}_1^{\frac{1}{4}}\overline{x}_2^{\frac{1}{4}}} = \frac{\frac{1}{2}(\overline{x}_1^{\frac{1}{2}} + 2\overline{x}_1^{\frac{1}{4}}\overline{x}_2^{\frac{1}{4}} + \overline{x}_1^{\frac{1}{2}})}{\overline{x}_1^{\frac{1}{2}} + \overline{x}_2^{\frac{1}{2}} + 2\overline{x}_1^{\frac{1}{4}}\overline{x}_2^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

l'élasticité d'échelle en tout point (et en particulier en $(1, 1)$) est donc égale à 1/2. Les rendements d'échelle sont donc partout décroissant.

(Donner un demi point pour le calcul de l'élasticité d'échelle en $(1, 1)$ et 1/2 point pour l'argument global. On peut accepter également un argument global basée sur la définition directe des rendements d'échelles et n'utilisant pas le calcul de l'élasticité. Mais le calcul de l'élasticité est absolument requis pour le point $(1, 1)$

(b) Trouver les fonctions de demandes de facteurs et d'offre d'output de cette firme en supposant de sa part un comportement de maximisation des profits (1,5 points)

Réponse: $f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} + 2x_1^{\frac{1}{4}}x_2^{\frac{1}{4}} = (x_1^{\frac{1}{4}} + x_2^{\frac{1}{4}})^2$.
On trouve les demandes de facteur en résolvant:

$$\max_{x_1,x_2} p_y(x_1^{\frac{1}{4}} + x_2^{\frac{1}{4}})^2 - p_1x_1 - p_2x_2$$

A partir des conditions de premier ordre:

$$\frac{1}{2x_1^{*\frac{3}{4}}}p_y(x_1^{*\frac{1}{4}} + x_2^{*\frac{1}{4}}) = p_1$$

$$\frac{1}{2x_2^{*\frac{3}{4}}}p_y(x_1^{*\frac{1}{4}} + x_2^{*\frac{1}{4}}) = p_2$$

on trouve:
$x_2^* = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p_1}\sqrt[3]{(p_2p_1^2)} + 1\right)^2 \frac{p_y^2}{p_2^2}$
et
$x_1^* = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p_2}\sqrt[3]{(p_2^2p_1)} + 1\right)^2 \frac{p_y^2}{p_1^2}$
et donc:

$$y^* = f(x_1^*, x_2^*) = \frac{p_y}{2}\left(\frac{\left(\frac{1}{p_1}\sqrt[3]{(p_2p_1^2)} + 1\right)^{\frac{1}{2}}}{p_2^{\frac{1}{2}}} + \frac{\left(\frac{1}{p_2}\sqrt[3]{(p_2^2p_1)} + 1\right)^{\frac{1}{2}}}{p_1^{\frac{1}{2}}}\right)^2$$

Mettre 1/2 point à l'étudiant qui a posé correctement le problème et écrit les conditions de premier ordre. Rajouter 1/2 point à l'étudiant qui a indiqué la marche à suivre pour obtenir les demandes et l'offre mais qui n'y est pas parvenu par défaillance algébrique.

(c) Trouver la fonction de profit associée à cette technologie (1/2 point).

Réponse:

$$\pi(p_y, p_1, p_2) = p_yy^* - p_1x_1^* - p_2x_2^*$$

$$= \frac{p_y^2}{2}[(\frac{\left(\frac{1}{p_1}\sqrt[3]{(p_2p_1^2)}+1\right)^{\frac{1}{2}}}{p_2^{\frac{1}{2}}} + \frac{\left(\frac{1}{p_2}\sqrt[3]{(p_2^2p_1)}+1\right)^{\frac{1}{2}}}{p_1^{\frac{1}{2}}})^2 -$$

$$\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{p_2}\sqrt[3]{(p_2^2p_1)}+1\right)^2}{p_1} - \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{p_1}\sqrt[3]{(p_2p_1^2)}+1\right)^2}{p_2}]$$

Mettre le demi-point à ceux qui indiquent comment calculer la fonction de profit mais qui n'ont pas obtenu la solution algébrique à la question b (laquelle était un peu difficile à obtenir j'en conviens).