

Corrigé d'exercices de ...scalité

Nicolas Gravel

January 8, 2003

QUESTION 1

Rogatien et Amélie sont tous deux amateurs de vin et de fromage. Rogatien supporte cependant très mal l'alcool de sorte qu'il ne peut s'empêcher de se comporter de façon grossière et machiste dès qu'il consomme la moindre quantité de vin, au grand dam d'Amélie. Si on désigne par g la quantité de grossièretés prononcées par Rogatien et par v la quantité de vin consommée par lui, la relation entre g et v est donnée par $v = g$. Les préférences d'Amélie pour le vin, le fromage et les grossièretés qu'elle doit subir de la part de son compagnon sont décrites par la fonction d'utilité suivante:

$$U_A = \frac{v_A f_A}{g}$$

Les préférences de Rogatien pour le vin et le fromage sont représentées par la fonction d'utilité:

$$U_R = v_R f_R$$

Rogatien et Amélie sont chacun doté initialement de 1/2 unité de vin et 1/2 unité de fromage. On constate, en utilisant le fromage comme numéraire, que le prix du vin s'établit à 1 et que, dans ce contexte, les deux comparses décident de ne consommer ni plus ni moins que le niveau de leur dotation initiale.

(a) Montrer que l'allocation de vin et de fromage qui résulte de l'équilibre concurrentiel n'est pas efficace.

Réponse: On remarque d'abord que la présence d'un effet externe (les grossièretés) n'influence pas le comportement de consommation d'Amélie. Celui-ci, comme celui de Rogatien, peut être décrit par la résolution du programme

$$\max_{v_i, f_i} v_i f_i \text{ sous contrainte que } p_v v_i + p_f f_i = R_i$$

où, pour $i = A; R$, $R_i = \frac{p_v}{2} + \frac{p_f}{2}$. En résolvant ce programme, on trouve les demandes Marshallienne de vin et de fromage des deux individus :

$$v_i^M(p_v; p_f; R_i) = \frac{R_i}{2p_v} = \frac{1}{4} + \frac{1p_f}{4p_v} \text{ et}$$

$$f_i^M(p_v; p_f; R_i) = \frac{R_i}{2p_f} = \frac{1}{4} + \frac{1p_v}{4p_f}$$

Puisque $p_v = p_f = 1$, on a alors que l'allocation de fromage, de vin et de grossièretés d'équilibre général est

$$v_A^M(1; 1; 1) = \frac{1}{2} = f_A^M(1; 1; 1) = \frac{1}{2} =$$

$$v_R^M(1; 1; 1) = \frac{1}{2} = f_R^M(1; 1; 1) = \frac{1}{2} = g$$

Cette allocation n'est pas Pareto efficace. Pour le voir, imaginons qu'Amélie propose à Rogatien de lui acheter une petite quantité " de vin en lui donnant, pour le compenser du déplaisir qu'il subira, petit peu de fromage. La quantité de fromage Φf qu'elle devra lui donner en compensation est déterminée par l'équation

$$dU^R = \frac{\partial U^R(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})}{\partial v} + \frac{\partial U^R(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})}{\partial f} \Phi f = 0$$

$$\Phi f = \frac{\frac{\partial U^R(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})}{\partial v}}{\frac{\partial U^R(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})}{\partial f}} = TMS_{vf}^R(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$$

Or, on a que

$$TMS_{vf}^R(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) = 1$$

Rogatien est, par définition de $\Phi f = "$, indifférent entre $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + "$) et $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Par contre, la variation d'utilité qu'enregistre Amélie du fait de sa décision est

$$dU^A = \frac{\partial U^A(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})}{\partial v} + \frac{\partial U^A(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})}{\partial f} + \frac{\partial U^A(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})}{\partial g}$$

$$= \frac{\partial((\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) = \frac{1}{2})}{\partial v} + \frac{\partial((\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) = \frac{1}{2})}{\partial f} + \frac{\partial((\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) = \frac{1}{2})}{\partial g}$$

$$= " + " + " = "$$

On peut donc améliorer le bien être d'Amélie sans détériorer celui de Rogatien. L'existence de cette possibilité de gains unanimes est incompatible avec l'efficacité Parétienne.

(b) Trouver un taux de taxation Pigouvienne ad valorem du vin qui permettrait de conduire l'économie vers une allocation Pareto-efficace. Que devrait faire l'Etat du produit de cette taxation ? Commenter.

Réponse: Déterminons une allocation efficace dans l'économie. Par exemple, maximisons l'utilité d'Amélie en garantissant à Rogatien le niveau d'utilité qu'il atteint dans la question (a) (vous pouvez, si vous le souhaitez, trouver d'autres allocations efficaces)

$$\begin{aligned} & \max_{v_A, f_A, v_R, f_R, g} \frac{v_A f_A}{g} \text{ sous contrainte que} \\ g &= v_R \\ v_A + v_R &= 1 \\ f_A + f_R &= 1 \\ v_R f_R &\geq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

En remarquant que la 4ème contrainte sera saturée à l'optimum, et en intégrant directement les contraintes dans la fonction objective, nous pouvons réécrire ce programme comme

$$\max_{f_A} (3 - 4f_A) f_A$$

qui nous donne comme condition de premier ordre (nécessaire à un maximum intérieur)

$$3 - 4f_A - 4f_A = 0, \quad f_A = 3/8$$

d'où on obtient:

$$\begin{aligned} f_R &= \frac{5}{8}, \quad v_A = \frac{3}{5} \\ v_R &= \frac{2}{5}, \quad g = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

On veut maintenant modifier les prix (par des taxes) de manière telle que les agents choisissent spontanément cette allocation. On va faire cette modification en faisant internaliser par l'émetteur d'externalités (ici Rogatien) les conséquences du désagrément qu'il cause à autrui. On va donc taxer la consommation de vin de Rogatien à un taux ad valorem t_v . Que ferons nous du produit de la taxe ? Nous le distribuerons aux agents de manière forfaitaire sous la forme de transferts T_A et T_R reçus par Amélie et Rogatien respectivement (ces transferts pourront, le

cas échéant, être négatifs). Les taux de taxe t_v , le prix hors taxe du vin p_v et les transferts forfaitaires T_A et T_R devront véri...er:

$$\begin{aligned} v_R^M(p_v(1+t_v); 1; \frac{p_v}{2} + \frac{1}{2} + T_R) &= \frac{\frac{p_v}{2} + \frac{1}{2} + T_R}{2p_v(1+t_v)} = \frac{2}{5} \\ v_A^M(p_v; 1; \frac{p_v}{2} + \frac{1}{2} + T_A) &= \frac{\frac{p_v}{2} + \frac{1}{2} + T_A}{2p_v} = \frac{3}{5} \\ f_R^M(p_v(1+t_v); \frac{p_v}{2} + \frac{1}{2} + T_R) &= \frac{\frac{p_v}{2} + \frac{1}{2} + T_R}{2} = \frac{5}{8} \\ f_A^M(p_v; 1; \frac{p_v}{2} + \frac{1}{2} + T_R) &= \frac{\frac{p_v}{2} + \frac{1}{2} + T_R}{2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

D'où on trouve $t_v = \frac{3}{2}$ (le vin consommé par Rogatien est taxé à 150 %!!), $p_v = \frac{5}{8}$, $T_R = \frac{7}{16}$ et $T_A = \frac{1}{16}$ (Amélie paie un impôt forfaitaire). Comme on le voit, s'est à Rogatien qu'est reversé, sous une forme forfaitaire, l'intégralité du produit de l'impôt récolté sur sa consommation de vin. On véri...e que les recettes ...cales résultant de l'impôt forfaitaire payé par Amélie et du produit de la taxation du vin consommé par Rogatien sont tout juste su santes à couvrir le transfert forfaitaire versé à ce dernier.

QUESTION 4

Trouver la structure optimale de la taxation indirecte au sens de Ramsey lorsqu'il n'y a qu'un seul agent doté de préférences de type Cobb-Douglas et lorsque le nombre de biens (en plus du loisir) est de 2.

Réponse: Si l (le nombre total de biens incluant le loisir) est 3, les équations de Ramsey vues en classes s'écrivent:

$$\frac{\partial x_1^H(q_1^a; q_2^a; w; u^a)}{\partial q_1} p_1 t_1^a + \frac{\partial x_1^H(q_1^a; q_2^a; w; u^a)}{\partial q_2} p_2 t_2^a = \frac{\partial x_2^H(q_1^a; q_2^a; w; u^a)}{\partial q_1} p_1 t_1^a + \frac{\partial x_2^H(q_1^a; q_2^a; w; u^a)}{\partial q_2} p_2 t_2^a \quad (0.1)$$

et

$$t_1^a p_1 x_1^M(q_1^a; q_2^a; w; T w) + t_2^a p_2 x_2^M(q_1^a; q_2^a; w; T w) = A \quad (0.2)$$

avec, pour $j = 1, 2$, $q_j^a = p_j (1 + t_j^a)$ et où $x_j^H(\cdot)$ et $x_j^M(\cdot)$ désignent, respectivement, les fonctions de demandes Hicksiennes et Marshalliennes de l'individu, T désigne la dotation de l'individu en temps disponible et w , le taux de salaire. On remarque immédiatement que, du fait de la symétrie de la matrice de Slutsky, (0.1) peut

s'écrire

$$\frac{\partial x_1^H(q_1^a; q_2^a; w; u^a)}{\partial q_1} p_1 t_1^a + \frac{\partial x_1^H(q_1^a; q_2^a; w; u^a)}{\partial q_2} (p_2 t_2^a - p_1 t_1^a) = \frac{\partial x_2^H(q_1^a; q_2^a; w; u^a)}{\partial q_2} p_2 t_2^a \quad (0.3)$$

Les préférences Cobb-Douglas de l'individu sont représentées par la fonction d'utilité

$$U(x_1; x_2; L) = x_1^a x_2^b L^c$$

avec a; b et c des nombres réels strictement positifs satisfaisant $a + b + c = 1$. On trouve aisément les demandes Marshalliennes associées à ces préférences comme solutions du programme

$$\max_{x_1; x_2; L} x_1^a x_2^b L^c \text{ sous contrainte que } q_1 x_1 + q_2 x_2 + wL = R$$

où R désigne la richesse de l'individu (ici égale à $T w$). Ces demandes sont:

$$x_1^M(q_1; q_2; w; T w) = \frac{aR}{q_1}$$

$$x_2^M(q_1; q_2; w; T w) = \frac{bR}{q_2}$$

et

$$L^M(q_1; q_2; w; T w) = \frac{cR}{w}$$

Substituant ces demandes dans la fonction d'utilité directe, on obtient la fonction d'utilité indirecte

$$V(q_1; q_2; w; R) = \left(\frac{a}{q_1}\right)^a \left(\frac{b}{q_2}\right)^b \left(\frac{c}{w}\right)^c R$$

d'où on tire, utilisant l'identité, $V(q_1; q_2; w; D(q_1; q_2; w; u)) = u$

$$D(q_1; q_2; w; u) = \left(\frac{q_1}{a}\right)^a \left(\frac{q_2}{b}\right)^b \left(\frac{w}{c}\right)^c u$$

Utilisant le lemme de Sheppard, on trouve donc les demandes Hicskiennes pertinentes pour les équations de Ramsey:

$$x_1^H(q_1^a; q_2^a; w; u^a) = \frac{\partial D(q_1^a; q_2^a; w; u^a)}{\partial q_1} = \left(\frac{q_1}{a}\right)^{a-1} \left(\frac{q_2}{b}\right)^b \left(\frac{w}{c}\right)^c u^a$$

et

$$x_1^H(q_1^a; q_2^a; w; u^a) = \frac{\partial D(q_1^a; q_2^a; w; u^a)}{\partial q_2} = \left(\frac{q_1}{a}\right)^a \left(\frac{q_2}{b}\right)^{b-1} \left(\frac{w}{c}\right)^c u$$

On peut donc, avec des préférences Cobb-Douglas, écrire les équations de Ramsey comme suit (après quelques simplifications):

$$(a_i - 1)p_1 t_1^a \frac{q_2^{a-1}}{b} + q_1^a q_2^a (p_2 t_2^a - p_1 t_1^a) = (b_i - 1)p_2 t_2^a \frac{q_1^{a-1}}{a} \quad (0.4)$$

et

$$t_1^a p_1 \frac{a}{q_1^a} + t_2^a p_2 \frac{b}{q_2^a} = \frac{A}{R} \quad (0.5)$$

Puisque $q_j^a = p_j(1 + t_j^a)$, on peut encore écrire (0.5) comme

$$t_1^a = \frac{\frac{A}{R} - b \frac{t_2^a}{1+t_2^a}}{a - \left(\frac{A}{R} - b \frac{t_2^a}{1+t_2^a}\right)}$$

ce qui nous donne, après substitution dans (0.4)

$$\begin{aligned} & (a_i - 1)p_1 \left(\frac{A}{R} - b \frac{t_2^a}{1+t_2^a}\right) \frac{p_2(1+t_2^a)^2}{b} + p_1 a p_2 (1+t_2^a) (p_2 t_2^a - p_1 \frac{A/R - b \frac{t_2^a}{1+t_2^a}}{a - (\frac{A}{R} - b \frac{t_2^a}{1+t_2^a})}) \\ &= \frac{a(b_i - 1)p_2 t_2^a p_1^2}{a - (\frac{A}{R} - b \frac{t_2^a}{1+t_2^a})} \end{aligned}$$

qu'il suffit de résoudre pour t_2^a

QUESTION 5 Une communauté se compose de deux individus, Léandre et Éléonore, chacun doté d'une demie unité de salsepareille et de temps disponible. La cueillette de salsepareille s'exécute selon la technologie $S = L$ où S et L désignent, respectivement, la quantité de salsepareille produite et la quantité de travail engagée. Les préférences d'Éléonore et de Léandre pour la salsepareille et le loisir sont représentables, respectivement, par les fonctions d'utilité suivantes:

$$U_E(I_E; X_E) = I_E^{\frac{1}{2}} X_E^{\frac{1}{2}}$$

et

$$U_L(I_L; X_L) = I_L^{\frac{1}{2}} X_L^{\frac{1}{2}}$$

où I_i et X_i (pour $i = E; L$) représentent, respectivement, la quantité de loisir et de salsepareille consommée par i . Dans cette économie, Léandre et Éléonore vont

s'échanger du temps contre de la salsepareille, la seule contrainte est que aucun des deux partenaires ne pourra consommer plus d'une demie unité de temps. Les dotations en temps, contrairement à celles de salsepareille, ne sont pas transférable d'un individu à l'autre. Un gouvernement est chargé de veiller au bien être de nos deux comparses. L'objectif de ce gouvernement est la maximisation de la fonction de bien être social $W()$ définie par $W(x_E; x_L; l_E; l_L) = U_E(l_E; x_E)U_L(l_L; x_L)$. Pour atteindre son objectif, le gouvernement ne peut taxer que la salsepareille (il ne peut bien évidemment pas taxer ou distribuer du temps).

a) Trouvez une allocation de temps et de Salsepareille qui soit socialement optimale du point de vue de ce gouvernement

Réponse: A une transformation monotone croissante près, le gouvernement veut résoudre:

$$\max_{l_E; x_E; l_L; x_L} \frac{1}{2} \ln l_E + \frac{1}{2} \ln x_E + \frac{1}{2} \ln l_L + \frac{1}{2} \ln x_L \text{ sous les contraintes que } l_i \leq \frac{1}{2} \text{ pour } i = E; L$$

$$x_E + x_L \leq l_E + l_L$$

Dans la mesure où la fonction objective du gouvernement est symétrique et concave par rapport aux deux individus, la résolution du programme exigera que les deux individus consomme les mêmes quantité de loisir et de salsepareille. En notant l et x ses quantités, le programme peut encore s'écrire

$$\max_{l; x} \ln l + \ln x \text{ sous les contraintes que } l \leq \frac{1}{2} \text{ et } x \leq 1 - l$$

Dans la mesure où la contrainte $x \leq 1 - l$ sera saturée à l'optimum (pourquoi ?), on peut encore écrire ce programme comme

$$\max_l \ln l + \ln(1 - l) \text{ sous contrainte que } l \leq \frac{1}{2}$$

Supposons d'abord que la contrainte $l \leq \frac{1}{2}$ ne soit pas serrée. La condition de premier ordre que satisfierait nécessairement une solution intérieure l^* de ce programme dans ce cas de ...gure serait:

$$\frac{1}{l^*} = \frac{1}{1 - l^*}$$

qui nous conduit à trouver $l^* = \frac{1}{2}$. La contrainte $l \leq \frac{1}{2}$ étant satisfaite, on accepte donc cette solution du problème sans contrainte comme solution du problème contraint. On trouve donc comme allocation Pareto-efficace de loisir et de salsepareille $(l_E^*; x_E^*; l_L^*; x_L^*) = (\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ soit la solution autarcique.

b) Existe-t-il un système de taxation qui permettrait de générer l'allocation calculée en a) comme résultat d'un équilibre général ? Si oui, Calculez le

Réponse: Utilisant la salsepareille comme numéraire, et remarquant que les profits maximaux associés à la technologie de ce problème (faisant l'objet de rendements d'échelle constants) seront nuls, nous voulons trouver un salaire horaire w et des transferts forfaitaires T_i satisfaisant $T_E + T_L = 0$ et tels que

$$I_i^M(w; 1; \frac{w}{2} + \frac{1}{2} + T_i) = \frac{\frac{w}{2} + \frac{1}{2} + T_i}{2w} = \frac{1}{2} \quad (i = E; L)$$

$$x_i^M(w; 1; \frac{w}{2} + \frac{1}{2} + T_i) = \frac{w}{4} + \frac{T_i}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad (i = E; L)$$

On trouve immédiatement $w = 1$ et $T_i = 0$. Interpréter ce résultat.

QUESTION 6 : Un économètre a partitionné les dépenses de consommation des Européens en 2 grandes catégories de biens: Les biens dits essentiels (alimentation, vêtements, logement et transports) dans la première catégorie et les biens récréatifs dans la seconde. Le comportement de consommation de ces 2 biens et du loisir des Européens peut s'exprimer comme résultant de la maximisation de la fonction d'utilité directe U définie par

$$U(x_1; x_2; x_3) = \ln x_1 + \ln(\min(x_2; x_3))$$

où x_j (pour $j = 1; 2$) désigne les dépenses consacrées aux biens de la catégorie j et x_3 désigne la quantité de loisir dont dispose l'individu. En supposant que le travail est la seule source de revenu des ménages européens, pourrait-on affirmer, sur la base du comportement révélé par cette fonction d'utilité, qu'une taxation des deux biens à taux uniforme est préférable à une taxation différenciée ? Justifier avec soin

Réponse: Nous savons que le seul cas où la taxation indirecte optimale est uniforme est lorsque l'agent que l'on taxe a des préférences qui sont implicitement séparable au sens (voir Deaton (1979;1981)) où la fonction de dépense de l'agent peut s'écrire

$$D(p_1; p_2; p_3; u) = H(f(p_1; p_2); p_3; u)$$

pour une certaine fonction réelle f à deux arguments et une fonction réelle H à trois arguments. Remarquons au passage que, si les fonctions sont dérivables deux fois, la séparabilité implicite des préférences implique que le rapport des

dérivées partielles de D vis à vis ses deux premiers arguments soit indépendant du troisième argument:

$$\frac{\frac{\partial D(p_1; p_2; p_3; u)}{\partial p_1}}{\frac{\partial D(p_1; p_2; p_3; u)}{\partial p_2}} = \frac{\frac{\partial H(f(p_1; p_2); p_3; u)}{\partial f} \frac{\partial f(\cdot)}{\partial p_1}}{\frac{\partial H(f(p_1; p_2); p_3; u)}{\partial f} \frac{\partial f(\cdot)}{\partial p_2}} = \frac{\frac{\partial f(\cdot)}{\partial p_1}}{\frac{\partial f(\cdot)}{\partial p_2}}$$

Nous devons donc vérifier si les préférences de l'européen représentatif génèrent une fonction de dépense ayant cette propriété. On trouve la fonction de dépense de l'européen représentatif en résolvant le programme

$$D(p_1; p_2; p_3; u) = \min_{x_1; x_2; x_3} p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 \text{ sous contrainte que } \ln x_1 + \ln(\min(x_2; x_3)) = u$$

utilisant le fait qu'une solution à ce programme impliquera $x_2 = x_3$ (pourquoi ?), on peut réécrire ce programme comme

$$D(p_1; p_2; p_3; u) = \min_{x_1; x} p_1 x_1 + (p_2 + p_3)x \text{ sous contrainte que } \ln x_1 + \ln x = u$$

que l'on peut encore écrire (en exploitant la saturation de la contrainte par la solution du programme):

$$D(p_1; p_2; p_3; u) = \min_x p_1 \frac{e^u}{x} + (p_2 + p_3)x$$

d'où l'on tire (par l'emploi des conditions de premier ordre):

$$x^a = x_2^a = x_3^a = \frac{p_1^{\frac{1}{2}} e^{\frac{u}{2}}}{(p_2 + p_3)^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$x_1^a = \frac{(p_2 + p_3)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{u}{2}}}{p_1^{\frac{1}{2}}}$$

Substituant ces valeurs dans la fonction objectifs nous obtenons

$$D(p_1; p_2; p_3; u) = p_1 x_1^a + p_2 x_2^a + p_3 x_3^a = 2p_1^{\frac{1}{2}} (p_2 + p_3)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{u}{2}}$$

On constate que cette fonction de dépense n'est pas implicitement séparable entre le loisir d'une part et les deux autres biens de l'autre. En effet

$$\frac{\frac{\partial D(p_1; p_2; p_3; u)}{\partial p_1}}{\frac{\partial D(p_1; p_2; p_3; u)}{\partial p_2}} = \frac{(p_2 + p_3)}{p_1}$$

dépend de p_3 . La taxation des deux biens à un taux uniforme n'est donc pas optimale ici.

QUESTION 7) Imaginez que vous disposiez d'observations répétées sur le comportement de consommation de quelques catégories de bien d'un échantillon de ménages français ainsi que sur les prix de ces biens et sur les revenus de ces ménages. Comment vous y prendriez-vous, à partir de ces informations, pour déterminer la structure optimale de la taxation indirecte en France ?

Réponse: On estimerait les paramètres d'une fonction d'utilité choisie dans une classe a priori (pour se limiter aux techniques de l'économétrie paramétrique) et on utiliserait ces paramètres pour déterminer, sur la base des formules de Ramsey vue en classe, les taux de taxation indirecte optimaux. Suivant le nombre d'observations, on pourrait estimer une fonction d'utilité différente pour différentes catégories de ménages ou se limiter à une seule fonction d'utilité (estimée pour un agent représentatif). Cette dernière approche souffre évidemment du défaut d'évacuer toute considération d'équité redistributive. Si l'on adopte la première approche, il faudra alors spécifier soigneusement la fonction de bien être social qu'on utilisera pour agréger les utilités individuelles. Il faudra également accepter de choisir une cardinalisation particulière de ces utilités pour les fins de l'agrégation sociale.

QUESTION 8) Supposons une économie à deux agents et à deux biens (en plus du loisir). Chacun des deux agents dispose d'une unité de temps disponible qu'il peut allouer au loisir et au travail. L'unité de travail de l'agent 1 est rémunérée à un salaire de 5 et celle de l'agent 2, à un salaire de 10. Un gouvernement souhaite prélever une somme de 2 unités de numéraire en taxant chacun des deux biens au moyen d'une taxe ad valorem. Le gouvernement ne peut pas taxer de manière différenciée les revenus de travail des deux agents (il peut taxer à un même taux les deux revenus de travail mais il est alors équivalent de supposer qu'il ne peut pas taxer les revenus de travail, comme vous avez contribué à le démontrer). Les deux agents ont la même fonction d'utilité $U(x_1; x_2; L)$ (L désigne la fraction du temps disponible allouée au loisir) pour les trois biens dé...

$$U(x_1; x_2; L) = 2 \ln x_1 + \ln x_2 + L$$

Le gouvernement évalue l'intérêt général au moyen de la fonction de bien être social $W(u_1; u_2) = (u_1^r + u_2^r)^{\frac{1}{r}}$ si $r \leq 0$ et $W(u_1; u_2) = \ln u_1 + \ln u_2$ autrement avec $r > 1$, un paramètre mesurant l'aversion pour l'inégalité de bien être du gouvernement ($r \rightarrow 1$ correspond à la fonction Rawlsienne, $r = 1$, à la fonction utilitariste, etc.). Trouver les taux de taxe ad valorem t_1 et t_2 optimaux (ces taux

seront une fonction précise de r). Indiquer comment cette taxation évolue au fur et à mesure que l'aversion pour l'inégalité augmente.

Réponse: Déterminons d'abord la fonction d'utilité indirecte (ainsi que les demandes Marshalliennes) d'un agent doté d'une richesse de R

$$V(q_1; q_2; w; R) = \max_{x_1; x_2; L} 2 \ln x_1 + \ln x_2 + L \text{ sous contrainte que } q_1 x_1 + q_2 x_2 + wL = R$$

$$L \in [0; 1], x_i \geq 0 \text{ (} i = 1; 2 \text{)}.$$

Les solutions de ce programme (obtenues par résolution des conditions de premier ordre) nous permettent d'obtenir

$$x_1^M(q_1; q_2; w; R) = \frac{2w}{q_1}$$

$$x_2^M(q_1; q_2; w; R) = \frac{w}{q_2}$$

$$L(q_1; q_2; w; R) = \frac{R - 3w}{3w}$$

si $R - 3w \geq 0$

$$x_1^M(q_1; q_2; w; R) = \frac{2R}{3q_1}$$

$$x_2^M(q_1; q_2; w; R) = \frac{R}{3q_2}$$

$$L(q_1; q_2; w; R) = 0$$

si $R - 3w < 0$ et

$$x_1^M(q_1; q_2; w; R) = \frac{2(R - 1)}{3q_1}$$

$$x_2^M(q_1; q_2; w; R) = \frac{R - 1}{3q_2}$$

$$L(q_1; q_2; w; R) = 1$$

si $R - 3w > 1$

Pour nous $R = w$ de sorte que qu'on sera toujours dans le cas

$$x_1^M(q_1; q_2; w; R) = \frac{2R}{3q_1}$$

$$x_2^M(q_1; q_2; w; R) = \frac{R}{3q_2}$$

$$L(q_1; q_2; w; R) = 0$$

On aura donc comme utilité indirecte

$$V(q_1; q_2; w; R) = \ln \frac{4R^3}{27q_1^2 q_2}$$

Utilisant le fait que $R = 5$ pour l'agent 1 et $R = 10$ pour l'agent 2, on peut donc écrire le programme du gouvernement comme suit

$$\max_{t_1; t_2} \left(\ln \frac{500}{27q_1^2 q_2} \right)^r + \ln \left(\frac{4000}{27q_1^2 q_2} \right)^r \quad \text{sous contrainte que}$$

$$t_1 p_1 \frac{10}{3q_1} + t_2 p_2 \frac{10}{3q_2} = 2$$

Substituant la contrainte (saturée au maximum) dans la fonction objective, et simplifiant, nous pouvons écrire le programme comme

$$\max_{t_2} \left(\ln \frac{500(2 + 7t_2)^2}{27p_1^2 (9t_2 - 1)^2 p_2 (1 + t_2)} \right)^r + \ln \left(\frac{(2 + 7t_2)^2 4000}{27p_1^2 (9t_2 - 1)^2 p_2 (1 + t_2)} \right)^r$$

La condition de premier ordre que satisfait t_2^* est (en omettant les termes inutiles et en réarrangeant les termes):

$$\frac{14(1 + (\ln 8)^{1+r})}{2 + 7t_2} = \frac{81 + (\ln 8)^{1+r} 88}{9t_2 - 1} + \frac{1 + (\ln 8)^{1+r}}{1 + t_2}$$

expression pour laquelle on trouve les deux racines:

$$t_2 = \frac{1}{2(504e^{(\ln(\ln 8))^r} + 553 \ln 8)} \quad \text{ou} \quad t_2 = \frac{628e^{(\ln(\ln 8))^r} + 691 \ln 8}{1744e^{2((\ln(\ln 8))^r)} + 4160e^{(\ln(\ln 8))^r} \ln 8 + 2465 \ln^2 8}$$

Laquelle est la bonne ?

QUESTION 9 Emmanuelle a des préférences pour le loisir et la consommation représentées par la fonction d'utilité

$$U(L; C) = \frac{LC}{L + C}$$

Elle dispose de 600 heures de temps disponible par mois qu'elle peut allouer au loisir et au travail. Emmanuelle est éligible au RMI de 2400F par mois. Elle ne dispose d'aucun revenu d'autres sources que le travail. Elle doit déduire du montant

de base du RMI qu'elle pourrait toucher l'intégralité de ses revenus d'activités. Plus précisément, si on désigne par x l'allocation versée à Emmanuelle par les autorités au chapitre du RMI et par R les revenus d'activité déclarés par Emmanuelle, on a

$$x = \max(2400 ; R ; 0)$$

Son salaire horaire net de charges sociales et d'impôts sur le revenu est de 36F par mois.

(a) Ecrire la contrainte budgétaire à laquelle est confrontée Emmanuelle ?

Réponse: La contrainte budgétaire d'Emmanuelle est décrite par l'inégalité $C \leq R + x$ avec R , le revenu d'activité défini par $R = (600 ; L) \cdot 36$ et x défini comme dans la question. En substituant ces expressions dans l'inégalité, on parvient à décrire l'ensemble de budget d'Emmanuelle par les inégalités suivantes

$$C \leq 2400 \text{ si } L \leq 543;33 \text{ et } C \leq 600 + 36L \text{ si } L > 543;33$$

$$C + 36L \leq 21600 \text{ si } L \in [0; 543;33]$$

(b) Combien d'heures de travail choisira de travailler Emmanuelle ?

Réponse:

Résolvant

$$\max_{L;C} \frac{LC}{L+C} \text{ sous contrainte que } C \leq 2400 \text{ si } L \leq 543;33 \text{ et } C + 36L \leq 21600 \text{ autrement}$$

on trouve d'abord la demande de loisir et de consommation qui maximiserait l'utilité d'Emmanuelle sur le segment de sa contrainte budgétaire définie par l'égalité $C + 36L = 21600$. Utilisant les techniques usuelles, on obtient ainsi les demandes Marshalliennes de loisir et de consommation (en notant p le prix de la consommation et I , la richesse du consommateur):

$$L^M(w; p; I) = \frac{I}{w^{\frac{1}{2}}(w^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}})}$$

$$C^M(w; p; I) = \frac{I}{p^{\frac{1}{2}}(w^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}})}$$

ce qui nous donne donc, pour le segment de la contrainte budgétaire décrite par l'inégalité $C + 36L \leq 21600$

$$C^M(36; 1; 21600) = \frac{21600}{7} \approx 3085;71 \text{ et}$$

$$L^M(36; 1; 21600) = \frac{21600}{42} \approx 514;29$$

Il faut évidemment comparer le niveau de satisfaction atteint par Emmanuelle avec ce nombre d'heures travaillées avec celui qu'elle atteindrait si elle ne travaillait pas et empochait un RMI de 2400. Il faut donc comparer

$$\frac{\frac{21600^2}{294}}{\frac{21600}{7} + \frac{21600}{42}} = \frac{21600}{49}$$

avec

$$\frac{600 \text{ € } 2400}{3000} = \frac{2400}{5}$$

une comparaison évidente qui est...en défaveur de la première alternative! Emmanuelle préfère donc ne pas travailler avec le régime actuel du RMI.

(c) Déterminer l'impact qu'aurait, sur l'offre de travail d'Emmanuelle, d'une réforme de type ACR dans le mode de perception du RMI qui remplacerait l'ancien mode de calcul de l'allocation par

$$x = \max(2400 ; 0 ; 4R ; 0)$$

Réponse: Raisonnant comme en b), on parvient à décrire la contrainte budgétaire d'Emmanuelle par deux segments

$$\begin{array}{ll} 21;6L + C & 15360 \text{ si } L \leq 533;33 \text{ ; } 600 + \frac{6000}{36} \\ 36L + C & C + 36L \quad 21600 \text{ si } L \geq [0; 533;33[\end{array}$$

Pour savoir sur quel segment Emmanuelle choisira de se localiser, il faut comparer le niveau indirect d'utilité correspondant à chaque segment. En substituant les formules de demandes Marshallienne générale trouvées en b dans la fonction d'utilité directe, on trouve, après quelques simplifications, la fonction d'utilité indirecte

$$V(w; p; I) = \frac{I}{(w^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}})^2}$$

Comparons donc les deux segments avec cette fonction. Comparons $\frac{15360}{(21;6^{\frac{1}{2}} + 1)^2}$ ' 481:58 (1er segment) avec $\frac{21600}{7^2}$ ' 440:82 (2ème segment). On constate que la comparaison est à l'avantage du premier segment. Emmanuelle va donc se localiser sur le premier segment et va choisir comme demande de loisir $L^M(21;6;1;15360) = \frac{15360}{21;6^{\frac{1}{2}}(21;6^{\frac{1}{2}} + 1)}$ ' 585:2. Elle travaillera donc 14,8 heures. La réforme sera donc favorable pour Emmanuelle.

(d) (exercice scolaire) Trouver la fonction d'offre Hicksienne de travail d'Emmanuelle et la fonction d'utilité indirecte sur les deux segments de sa contrainte budgétaire.

Réponse: On a trouvé plus haut la fonction d'utilité indirecte $V(w; p; I) = \frac{I}{(w^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}})^2}$. De là, on tire la fonction de dépense $D(w; p; u) = (w^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}})^2 u$. Pour les demandes Hicksiennes:

$$L^H(w; p; u) = L^M(w; p; D(w; p; u)) = \frac{D(w; p; u)}{w^{\frac{1}{2}}(w^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}})} = \frac{(w^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}})^2 u}{w^{\frac{1}{2}}(w^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}})} = \frac{(w^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}})u}{w^{\frac{1}{2}}}$$

$$C^M(w; p; I) = C^M(w; p; D(w; p; u)) = \frac{D(w; p; u)}{p^{\frac{1}{2}}(w^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}})} = \frac{(w^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}})^2 u}{p^{\frac{1}{2}}(w^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}})} = \frac{(w^{\frac{1}{2}} + p^{\frac{1}{2}})u}{p^{\frac{1}{2}}}$$

QUESTION 10 Une économie se compose de Bobépine et Abdallah. Bobépine a une productivité de 1 et Abdallah, une productivité de 2. Le gouvernement ne peut observer la productivité des deux individus et souhaite redistribuer les revenus entre ces deux agents au moyen d'une taxation linéaire de forme

$$t = T + tw_i h_i$$

où (pour $i = \text{Abdallah, Bobépine}$) w_i et h_i désignent, respectivement, la productivité (égale au salaire horaire brut) et le nombre d'heures travaillées par l'agent i . L'objectif redistributif du gouvernement s'exprime par une fonction de bien être social

$$W(u_1; u_2) = (u_1^r + u_2^r)^{\frac{1}{r}}$$

avec r , un paramètre d'aversion pour l'inégalité. Chaque agent dispose de 168 heures de temps disponible par semaine. Ce temps peut être alloué au loisir et au travail. Les préférences de chaque agent pour le loisir (L) et la consommation (C) sont représentées par la fonction d'utilité (identique chez les deux agents)

$$U(L; C) = \ln L + \ln C$$

(a) Trouver le montant minimal de transfert en haut duquel personne ne choisirait de travailler

Réponse:

Le gouvernement veut redistribuer la richesse entre les deux agents. Il faut donc (en notant h_i la quantité de travail offerte par i) que $2T + t(h_1 + 2h_2) = 0$. Cette égalité peut être satisfaite soit par un $T < 0$ et un $t > 0$, soit par un $t < 0$ et un $T > 0$. Le deuxième cas, théoriquement possible, correspondrait

à une situation où le gouvernement choisirait de subventionner le travail et de prélever un impôt forfaitaire aux deux agents. Un agent de type i est confronté à la contrainte budgétaire

$$(1 - t)w_i L + C = (1 - t)w_i 168 + T$$

Si l'agent i choisit de travailler, sa demande de loisir sera (après maximisation usuelle de l'utilité et utilisation des conditions de premier ordre):

$$L^M((1 - t)w_i; 1; (1 - t)w_i 168 + T) = \frac{(1 - t)w_i 168 + T}{2(1 - t)w_i} = 84 + \frac{T}{2(1 - t)w_i}$$

si évidemment $L^M((1 - t)w_i; 1; (1 - t)w_i 168 + T) \leq 168$ c'est à dire si $T \leq (1 - t)w_i 168$. Dans la mesure où $w_i \geq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2g$, il est clair que cette condition sera toujours vérifiée si $T > 0$. Si $T < 0$ (cas où un transfert est versé à chaque agent et une imposition des revenus de travail est effectuée), il est clair qu'un T tel que $T < -\frac{1}{2} \times 336$ conduira tous les individus à cesser le travail. Par ailleurs, un $T < -\frac{1}{2} \times 168$ conduira Bobépine à ne pas travailler quelque soit le taux d'impôt (forcément positif et inférieur à 1 dans ce cas). Par ailleurs, nous comprenons que si $T \in [-\frac{1}{2} \times 336; -\frac{1}{2} \times 168]$, Abdallah pourrait choisir de travailler si le taux d'impôt t est tel que $\frac{1}{2} \times T \geq (1 - t) \times 336$, $t \leq \frac{1}{2} + \frac{T}{336}$. Mais dans la mesure où l'assiette fiscale sur laquelle est assis ce taux d'impôt (le revenu brut d'activité d'Abdallah) est comprise entre 0 et 336, on ne pourra financer un transfert d'un montant supérieur à 168 qu'avec un impôt d'un taux au moins aussi élevé qu' $\frac{1}{2}$ (avec $t = \frac{1}{2}$ on ne peut financer un transfert d'un montant de 168 que si Abdallah travaille 168h). Donc Abdallah ne travaillera jamais si $T \in [-\frac{1}{2} \times 336; -\frac{1}{2} \times 168]$. Le transfert devra donc être inférieur à 168 pour que certains individus choisissent de travailler.

On peut écrire l'utilité indirecte d'un agent i (en intégrant la possibilité de non-travail) comme suit:

$$\begin{aligned} V((1 - t)w_i; 1; T) &= \ln\left(84 + \frac{T}{2(1 - t)w_i}\right) + \ln\left(84(1 - t)w_i + \frac{T}{2}\right) \\ &= 2 \ln(168(1 - t)w_i + T) - \ln 4 + \ln((1 - t)w_i) \end{aligned}$$

si $\frac{1}{2} \times T \geq (1 - t)w_i 168$ et

$$V((1 - t)w_i; 1; T) = \ln(168) + \ln(j - T)$$

autrement.

(b) Trouver le taux d'impôt optimal (votre réponse sera une fonction de r)

Réponse: Ignorons d'abord la possibilité de non-travail. La satisfaction de la contrainte budgétaire du gouvernement exige que: $i 2T = 2t(84 + \frac{T}{4(1-i)}) + t(84 + \frac{T}{2(1-i)})$, $i T = \frac{t252(1-i)}{2-i}$: Si on substitue cette expression dans l'utilité indirecte d'un individu, on obtient:

$$v(t) = 2 \ln(168(1-i)t)w_i + \frac{t252(1-i)}{2-i} i \ln 4 i \ln((1-i)t)w_i$$

On cherche donc à trouver t qui résout:

$$\max_t \left[\left(2 \ln(336(1-i)t) + \frac{t252(1-i)}{2-i} \right) i \ln 4 i \ln((1-i)t) \right]^r + \left(2 \ln(168(1-i)t) + \frac{t252(1-i)}{2-i} \right) i \ln 4 i \ln(1-i)t \right]^{\frac{1}{r}}$$

ou encore:

$$\max_t \left[\ln \left(\frac{2(84(1-i)(2-i)t + 63t(1-i))^2}{(2-i)^2(1-i)t} \right) \right]^r + \left(\ln \left(\frac{4(42(1-i)(2-i)t + 63t(1-i))^2}{(2-i)^2(1-i)t} \right) \right)^{\frac{1}{r}}$$

Il faut s'amuser à résoudre cela (je conviens que c'est long).

(c) Pour quelles valeurs de r le taux d'impôt optimal choisi par le gouvernement conduira-t-il Bobépine à ne pas travailler ?