2ème série d'exercices de théorie des jeux (solutions)

Décembre 2009

Question 1 On considère un jeu de négociation à deux joueurs à la Rubinstein qui ne dure que deux périodes. le joueur 1 fait la première offre que le joueur 2 peut accepter ou refuser. Si le joueur 2 refuse, il peut faire une contre offre que le joueur 1 peut accepter ou refuser et le jeu s'arrête alors. Le joueur 1 escompte les paiements futurs à un taux δ_1 et le joueur 2, à un taux δ_2. Comme en classe, la négociation porte sur des paires $(\alpha, 1-\alpha)$ où $\alpha \in [0,1]$ s'interprète comme la fraction des bénéfices de la coopération reçue par le joueur 1. Trouver le ou les équilibres parfaits en sous-jeu. Refaire la question pour le cas où la négociation dure 3 périodes (le joueur 1 fait, si besoin est, la dernière contre offre). Refaire la question si la négociation dure 4 périodes. Comparer avec l'équilibre parfait en sous-jeu du modèle de Rubinstein pour un nombre (possiblement) infini de périodes.

OK. Fait en classe

Question 2 Soit le jeu sous forme normale suivant, utilisé comme exemple par Aumann pour justifier l'intérêt des équilibres de Nash correlés.

		joueur 2	
		y_1	y_2
joueur 1	x_1	$(5,1)$	$(0,0)$
	x_2	$(4,4)$	$(1,5)$

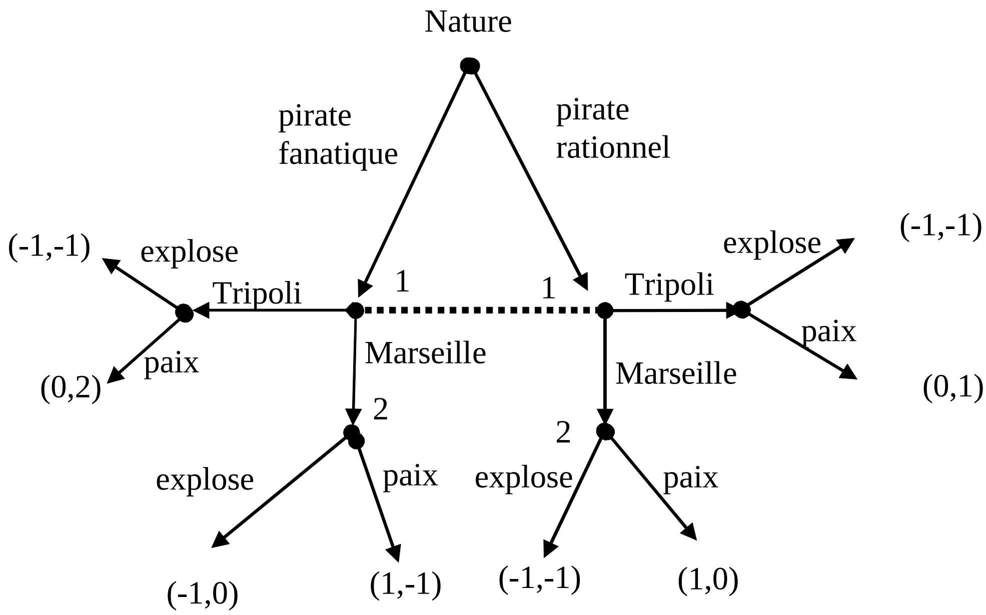
Trouver l'équilibre de Nash correlé qui donnerait le meilleur paiement espéré au joueur 1. Trouver également l'équilibre de Nash correlé qui donnerait le meilleur paiement espéré au joueur 2.

Que concluez vous ?

Réponse: Le meilleur paiement que peut espérere chacun des 2 joueurs ici est 5. L'équilibre de Nash (x_1, y_1) donne au joueur 1 ce paiement. On peut facilement obtenir cet équilibre de Nash comme un équilibre correlé (par exemple, en jetant une pièce de monnaie et en disant au joueur 1 de jouer x_1 indépendamment du résultat du jet et au joeur 2 de jouer y_1 indépendamment du résultat du jet). Pour le joueur 2, c'est l'équilibre de Nash (x_2, y_2) qui lui donne son paiement de 5. On constate évidemment que les joueurs s'opposent radicalement quant à ces paiements, et qu'un équilibre de Nash en stratégies pures est évidemment un équilibre de Nash correlé.

Question 3 On considère le jeu du pilote et du pirate de l'air étudié en classe en introduisant une incertitude sur la nature du pirate de l'air. Plus précisément, on suppose que le pirate de l'air peut être de type "fanatique" ou de type "rationnel". Le type rationnel correspond au type étudié en classe (quelque soit le lieu d'atterrissage de l'avion, le pirate de l'air préfère ne pas faire exploser l'avion). Le type "fanatique" du pirate de l'air correspond à un individu qui serait disposé à faire exploser l'avion en cas d'un atterrissage à Marseille (mais pas en cas d'un atterrissage à Tripoli). Le pilote a des croyances probabilistes *a priori* sur le type du pirate de l'air. Représentez le problème de décision correspondant à cette situation comme un jeu sous forme extensive (vous êtes libre de trouver les paiements numériques des deux joueurs qui représentent les préférences des deux joueurs pour les différentes issues possibles de l'interaction). Compte tenu des paiements que vous avez utilisés pour faire cette modélisation, trouvez la probabilité minimale que le pilote pourrait attribuer à la rationalité du pirate de l'air qui rendrait rationel, du point de vue du pilote, la décision de faire atterrir l'avion à Marseille.

Réponse: voici une forme extensive possible du jeu (sans les croyances probabilistes). Le pirate à intérêt à faire sauter l'avion s'il se pose à Marseille. Si le pilote va à Tripoli, il a un paiement de zéro quel que soit le type du pirate parce que celui ci ne fera jamais sauter l'avion dans ce cas. S'il va à Marseille, le pirate fait sauter l'avion s'il est fanatique (paiement de -1 pour le pilote) mais ne le fait pas sauter s'il est rationnel (paiement de 1 pour le pilote). Le pilote fera atterir l'avion à Marseille s'il attribue une probabilité inférieure à 1/2 au fait que le pirate soit fanatique.



Question 4 Compaq est un leader sur le marché des micro-ordinateurs. Elle choisit, au début de l'année, le nombre de micro-ordinateurs qu'elle choisira de produire. Dell est le seul autre concurrent sérieux de Compaq. Dell observe la production de Compaq avant de décider de la sienne. La fonction de coûts de Compaq est $C_C(q) = 4q + 6q^2$ tandis que celle de Dell est $C_D(q) = 4q + 2q^2$. La fonction de demande pour les micro-ordinateurs est $Q = 188 - \frac{p}{2}$ où p est le prix.

(a) Imaginons que Dell s'engage par écrit à produire, après avoir observé la production de Compaq, 42 unités de micro-ordinateurs. Que choisirait alors de produire Compaq s'il prêtait foi en l'engagement de Dell ? Etant donné ce choix de Compaq, Dell aurait-t-il intérêt à produire ses 42 unités ?.

Réponse: Déterminons d'abord les fonctions de meilleures réponses des deux entreprises au choix de l'autre. La meilleure réponse $q_C^r(q_D)$ de Compaq à la quantité q_D choisie par Dell résout le programme suivant:

$$\max_{q_C} (376 - 2(q_D + q_C))q_C - 4q_C - 6q_C^2$$

A ce titre, si cette meilleure réponse est positive, elle satisfait la condition de premier ordre:

$$\begin{aligned} 376 - 2q_D - 4q_C^r(q_D) - 4 - 12q_C^r(q_D) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ q_C^r(q_D) &= \frac{93}{4} - \frac{q_D}{8} \end{aligned}$$

De manière analogue, nous pouvons déterminer la meilleure réponse $q_D^r(q_C)$ de Dell toute quantité q_C choisie par Compaq en résolvant le programme:

$$\max_{q_D} (376 - 2(q_D + q_C))q_D - 4q_D - 2q_D^2$$

dont la condition de premier ordre:

$$\begin{aligned} 376 - 2q_C - 4q_D^r(q_C) - 4 - 4q_D^r(q_C) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ q_D^r(q_C) &= \frac{93}{2} - \frac{q_C}{4} \end{aligned}$$

Si Dell s'engage à produire 42 unités, nous en déduisons que Compaq, qui décide le premier, produira $q_C^r(42) = \frac{93}{4} - \frac{42}{8} = \frac{186-42}{8} = 18$ unités. Par ailleurs, si Compaq produisait 18 unités, Dell aurait en effet intérêt à produire les 42 unités qu'il s'était engagé à produire. En effet, la meilleure réponse de Dell à une production par Compaq de 18 unités est précisément de $q_D^r(18) = \frac{93}{2} - \frac{18}{4} = \frac{93-9}{2} = 42$ unités.

(b) Montrer que la situation étudiée en (a) n'est pas parfaite en sous-jeu. Déterminer l'unique équilibre parfait en sous-jeu de ce jeu (souvent appelé "équilibre de Stackleberg").

Réponse: Produire 42 unités quoique fasse Compaq n'est pas, pour Dell, toujours optimal. C'est optimal dans le sous-jeu initié par le choix , de la part de Compaq, d'une production de 18 mais ce n'est pas optimal si Compaq décide autrement. Ce qui est optimal pour Dell est de fournir une meilleure réponse au choix de Compaq. Etant donnée cette réaction optimale future de Dell, Compaq n'a pas intérêt à choisir 18. Il a intérêt a choisir un niveau de production qui, étant donné la réaction optimale future de Dell, lui donnera le plus de profit. En terme formel, nous devons supposer que le leader Compaq résout le programme suivant:

$$\begin{aligned} & \max_{q_C}(376 - 2(q_D^r(q_C) + q_C))q_C - 4q_C - 6q_C^2 \\ \Leftrightarrow & \\ & \max_{q_C}(376 - 2(\frac{93}{2} - \frac{q_C}{4} + q_C))q_C - 4q_C - 6q_C^2 \\ \Leftrightarrow & \\ & \max_{q_C}(283 - \frac{3q_C}{2})q_C - 4q_C - 6q_C^2 \end{aligned}$$

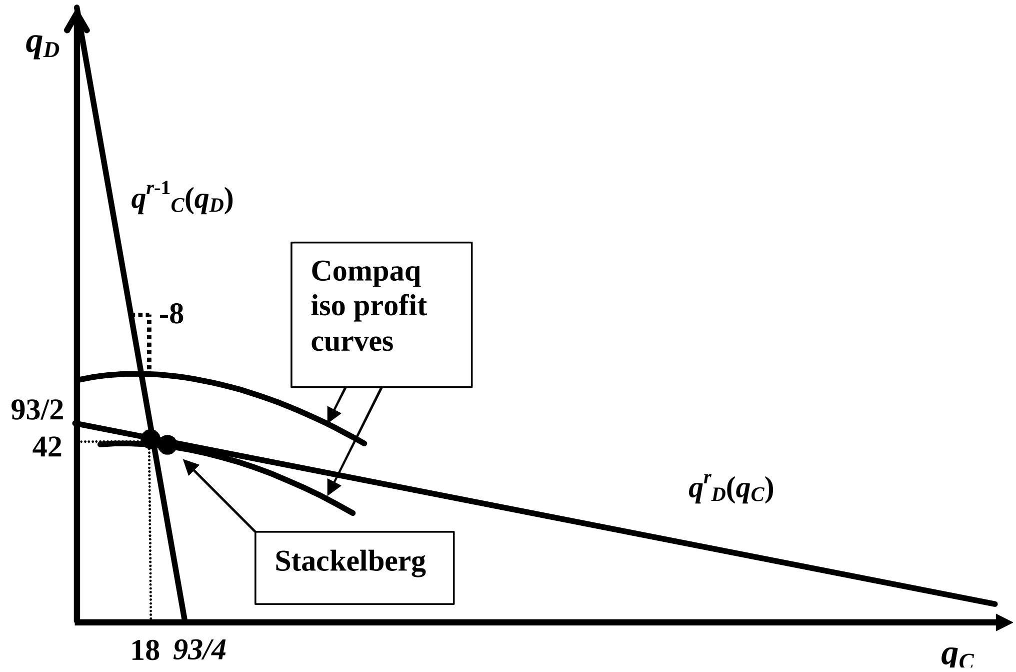
dont la condition de premier ordre est:

$$\begin{aligned} 283 - 3q_C^* - 4 - 12q_C^* &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ q_C^* &= \frac{93}{5} \end{aligned}$$

Compaq choisira donc de produire $\frac{93}{5}$ unités et, réagissant optimalement à cela, Dell produira $q_D^r(\frac{93}{5}) = \frac{93}{2} - \frac{93}{20} = \frac{930-93}{20} = \frac{837}{20}$

(c) Illustrer graphiquement votre réponse. Expliquer pourquoi Dell est victime de son incapacité à s'engager de manière crédible.

Voici le dessin, un peu encombré du fait de la proximité des équilibres de Nash et de Stackelberg. Le niveau de profit de Compaq augmente en direction sud-est. Dell est victime de son incapacité à s'engager de manière crédible car il est moins bien à l'équilibre de Stackelberg qu'à l'équilibre de Nash non-parfait en sous-jeu considéré dans la sous-question précédente. Il aimerait convaincre Compaq qu'il produira 42 quoi qu'il arrive car cela convaincrait Compaq de ne produire que 18 mais il n'y parvient pas car Compaq sait que si elle augmente sa production, Dell réduira la sienne. Le problème que pose l'incapacité à s'engager est récurrent dans tous les jeux sous forme extensive où un joueur est amené à jouer après avoir observer la décision de l'autre.



Question 5 Pour les jeux sous forme extensive présentés à la page suivante, déterminer les équilibres séquentiels.

Le deuxième jeu a été vu en classe. Pour le premier jeu, voici les équilibres séquentiels (pour le joueur 1, les stratégies sont contingentes aux trois états de la nature mis dans l'ordre de haut en bas et, pour le joueur 2, elles sont contingentes à la stratégie adoptée par le joueur 1,dans l'ordre H d'abord, et B ensuite)

$(HBH,\ hh)$ "le joueur 1 joue H si la nature a joué en haut ou en bas et joue B si la nature a joué dans le milieu et le joueur 2 joue h quoique fasse le joueur 2" est un équilibre séquentiel. Cet équilibre est clairement un équilibre de Nash. Si le jouer 1 anticipe de 2 un jeu de h quoiqu'il fasse, il a intérêt, si la nature joue en haut, à jouer H (et à obtenir un paiement de 2), plutôt que je jouer B et obtenir, dans l'éventualité où 2 jouera h, un paiement de-1. De même, si la nature joue centre et le joueur 1 anticipe de la part du joueur 2 un choix de h en toute circonstance, il a intérêt à jouer B, et recevoir 0 plutôt que de jouer H et recevoir -1. Finalement, si la nature joue en bas, le joueur 1 a intérêt à jouer H et à recevoir, en supposant que 2 joue h, un paiement de 5 plutôt que de jouer B et recevoir, si 2 joue h, un paiement de -1. Est-il rationnel pour 2 de jouer h quoique fasse 1, compte tenu des croyances probabilistes, cohérentes au sens de l'équilibre séquentiel, que 2 peut avoir de se trouver aux différents noeuds étant donné le choix observé du joueur 1. Si 2 voit 1 jouer H, il a intérêt à jouer h si la probabilité p qu'il attribue au fait d'être au noeud du haut est au moins égale au quart de 1 moins la probabilité p' qu'il attribue au fait d'être au noeud du milieu (*i.e.* si $p \geq \frac{1-p'}{4}$). Or si le joueur 1 joue HBH, le joueur 2 doit conclure, s'il voit 1 jouer H, qu'il est certain de ne pas être sur le noeud du milieu (car le joueur 1 aurait joué B dans ce cas). Il doit donc attribuer une probabilité nulle au fait d'être au noeud du milieu. Dans ce cas, le choix de h est rationnel pour 2 s'il attribue une probabilité au moins aussi grande que $p = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$ au fait d'être au noeud du haut. Une telle croyance probabiliste est cohérente avec la règle de Bayes, étant donné le fait que le noeud du milieu est impossible, et que la probabilité initiale d'être au noeud du haut est de $0,7$. Si le joueur 2 voit le joueur 1 choisir B, il doit en conclure, étant donnée la stratégie globale HBH de 1, qu'il est certain d'être au noeud du centre. Si c'est le cas, 2 a en effet intérêt à jouer h, et recevoir un paiement de 0 plutôt que de jouer b, et recevoir -1.

$(BHB,\, bb)$ "le joueur 1 joue B si la nature a joué en haut ou en bas et joue H si la nature a joué dans le milieu et le joueur 2 joue b quoique fasse le joueur 2" est également un équilibre séquentiel. Cet équilibre est clairement un équilibre de Nash. Si le jouer 1 anticipe de 2 un jeu de b quoiqu'il fasse, il a intérêt, si la nature joue en haut, à jouer B (et à obtenir un paiement de 2), plutôt que je jouer H et obtenir, dans l'éventualité où 2 jouera b, un paiement de -1. De même, si la nature joue centre et le joueur 1 anticipe de la part du joueur 2 un choix de b en toute circonstance, il a intérêt à jouer H, et recevoir 1 plutôt que de jouer B et recevoir -1. Finalement, si la nature joue en bas, le joueur 1 a intérêt à jouer B et à recevoir, en supposant que 2 joue b, un paiement de 4 plutôt que de jouer B et recevoir, si 2 joue b, un paiement de 0. Est-il rationnel pour 2 de jouer b quoique fasse 1, compte tenu des croyances probabilistes, cohérentes au sens de l'équilibre séquentiel, que 2 peut avoir de se trouver aux différents noeuds étant donné le choix observé du joueur 1. Si 2 voit 1 jouer B, il a intérêt à jouer b s'il attribue une probabilité nulle au fait d'être au noeud du milieu (ce qu'il doit faire sous l'hypothèse où 1 ne joue pas B si la nature a joué au milieu. Finalement, si le joueur 1 joue H, le joueur 2 doit en conclure qu'il est certain d'être au noeud du centre, dans lequel cas il a effectivement intérêt à jouer b, et recevoir un paiement de 1 plutôt que de jouer h, et recevoir -1.

$(HHH,\, hb)$ "le joueur 1 joue H quoiqu'ait fait la nature et le joueur 2 joue h si 1 joue H et joue b si 1 joue B" est également un équilibre séquentiel. Si 1 anticipe de la part de 2 une réponse de h à H et de b à B, il a intérêt (faiblement) à jouer H quelque soit le choix de la nature. Si la nature joue en haut, il gagne 2 en jouant H et en ayant une réponse de h du joueur 2 alors qu'il aurait également 2 s'il jouait B et le joueur 2 répondait par b. Il a donc faiblement intérêt à jouer H dans ce cas. Si la nature joue au centre, il "gagne" -1 en jouant H (sous l'hypothèse où 2 répond par h) mais il "gagnerait" également -1 s'il jouait B et si, cette fois, 2 répondait par b. Il a donc ici aussi faiblement intérêt à jouer H. Finalement, si la nature joue en bas, le joueur 1 gagne 5 en jouant H (si 2 répond par h) alors qu'il obtiendrait 4 s'il jouait B (et 2 répondait par b). Pour le joueur 2, répondre h à H est rationnel s'il anticipe être au noeud du haut avec une probabilité $p \geq \frac{1-p'}{4}$ où, comme en haut, p' est la probabilité d'être au noeud du centre. En particulier donc, puisque la nature choisit le noeud du haut avec proba $0,7$ et le noeud du milieu avec proba $0,1$, il est facile de rationaliser ces croyances. Pour l'équilibre séquentiel, il faut également être en mesure de rationaliser la réponse, par 1, de b à un choix de B même si, à l'équilibre, le joueur 2 n'est jamais amené à observer B. Si 2 observait B, il aurait intérêt à jouer b si les probabilités p et p' qu'il attribue, respectivement, au fait d'être au noeud du haut et du centre satisfaisaient: $p' \leq \frac{5-p}{6}$. Ce sera évidemment le cas si le joueur 2 assignait au trois noeuds les mêmes probabilités que la nature. .

Question 6 Dans le jeu de la vérité considéré dans la première série d'exercice, l'équilibre dans lequel le joueur 1 déclare pile quelque soit le résultat du jet de la pièce et le joueur 2 annonce face s'il entend pile et annonce pile s'il entend face est-il un équilibre séquentiel ? Qu'en pensez-vous ? Trouvez-vous cet équilibre plausible ?

Réponse: Annoncer "pile" quelque soit le résultat du jet pour le joueur 1 et annoncer le contraire de ce qui dit le joueur 1 pour le joueur 2 est un équilibre séquentiel mais qui ne satisfait pas le critère intuitif de Cho et Kreps (voir diapositives du cours, à la fin du chapitre sur les formes extensives).

Question 7: La population de travailleurs que peut considérer pour l'embauche la direction des ressources humaines d'un organisme public (où existe une sécurité d'emploi) se divise en deux catégories: Les talentueux et les incapables. L'entreprise n'est pas en mesure, sur la base d'un simple entretien, de savoir si un travailleur est talentueux ou incapable. L'embauche d'un travailleur incapable apporte à l'organisme 100 unités de numéraire. L'embauche d'un travailleur talentueux apporte pour sa part une valeur de 300. Un travailleur talentueux refuse de travailler à un salaire inférieur à 150 tandis qu'un travailleur incapable accepte de travailler à tout salaire non-négatif. L'organisme public a la possibilité de faire dépendre les salaires versés de l'acquisition de diplômes qui sanctionnent un certain nombre d'années passées à l'université à apprendre péniblement des choses inutiles. L'équivalent monétaire du coût psychologique supporté pendant x années d'études est de $10x$ pour un individu talentueux et de $20x$ pour un incapable. La direction des ressources humaines estime à $p \in [0, 1]$ la fraction de travailleurs qui sont incapables.

(a) En supposant que l'entreprise soit neutre par rapport au risque, quelle est la plus grande valeur de p qui rendrait rationnelle, pour l'entreprise, le paiement à tous les travailleurs d'un même salaire tout en incitant les travailleurs talentueux à offrir leurs services ?

(b) Déterminer la meilleure (en terme de surplus réalisé sur chaque type de travailleur) politique salariale basée sur le diplôme que pourrait choisir l'entreprise (sous contrainte d'incitation à révéler le type de chaque travailleur).

Réponse: Oubliez cette question.