

## 2ème série d'exercices de théorie des jeux

Le 29 octobre 2008

**Question 1** On considère un jeu de négociation à deux joueurs à la Rubinstein qui ne dure que deux périodes. le joueur 1 fait la première offre que le joueur 2 peut accepter ou refuser. Si le joueur 2 refuse, il peut faire une contre offre que le joueur 1 peut accepter ou refuser et le jeu s'arrête alors. Le joueur 1 escompte les paiements futurs à un taux  $\delta_1$  et le joueur 2, à un taux  $\delta_2$ . Comme en classe, la négociation porte sur des paires  $(\alpha, 1 - \alpha)$  où  $\alpha \in [0, 1]$  s'interprète comme la fraction des bénéfices de la coopération reçue par le joueur 1. Trouver le ou les équilibres parfaits en sous-jeu. Refaire la question pour le cas où la négociation dure 3 périodes (le joueur 1 fait, si besoin est, la dernière contre offre). Refaire la question si la négociation dure 4 périodes. Comparer avec l'équilibre parfait en sous-jeu du modèle de Rubinstein pour un nombre (possiblement) infini de périodes.

**Question 2** Soit le jeu sous forme normale suivant, utilisé comme exemple par Aumann pour justifier l'intérêt des équilibres de Nash corrélés.

		joueur 2	
		$x_2$	$y_2$
joueur 1	$x_1$	(5, 1)	(0, 0)
	$y_1$	(4, 4)	(1, 5)

Trouver l'équilibre de Nash corrélé qui donnerait le meilleur paiement espéré au joueur 1. Trouver également l'équilibre de Nash corrélé qui donnerait le meilleur paiement espéré au joueur 2. Quel équilibre de Nash corrélé vous paraît constituer le meilleur compromis auquel pourraient aboutir les joueurs ?

**Question 3** On considère le jeu du pilote et du pirate de l'air étudié en classe en introduisant une incertitude sur la nature du pirate de l'air. Plus précisément, on suppose que le pirate de l'air peut être de type "fanatique" ou de type "rationnel". Le type rationnel correspond au type étudié en classe (quelque soit le lieu d'atterrissage de l'avion, le pirate de l'air préfère ne pas faire exploser l'avion). Le type "fanatique" du pirate de l'air correspond à un individu qui serait disposé à faire exploser l'avion en cas d'un atterrissage à Marseille (mais pas en cas d'un atterrissage à Tripoli). Le pilote a des croyances probabilistes *a priori* sur le type du pirate de l'air. Représentez le problème de décision correspondant à cette situation comme un jeu sous forme extensive (vous êtes libre de trouver les paiements numériques des deux joueurs qui représentent les préférences des deux joueurs pour les différentes issues possibles de l'interaction). Compte tenu des paiements que vous avez utilisés pour faire cette modélisation, trouvez la probabilité minimale que le pilote pourrait attribuer à la rationalité du pirate de l'air qui rendrait rationnel, du point de vue du pilote, la décision de faire atterrir l'avion à Marseille.

**Question 4** Compaq est un leader sur le marché des micro-ordinateurs. Elle choisit, au début de l'année, le nombre de micro-ordinateurs qu'elle choisira de produire. Dell est le seul autre concurrent sérieux de Compaq. Dell observe la production de Compaq avant de décider de la sienne. La fonction de coûts de Compaq est  $C_C(q) = 4q + 6q^2$  tandis que celle de Dell est  $C_D(q) = 4q + 2q^2$ . La fonction de demande pour les micro-ordinateurs est  $Q = 188 - \frac{p}{2}$  où  $p$  est le prix.

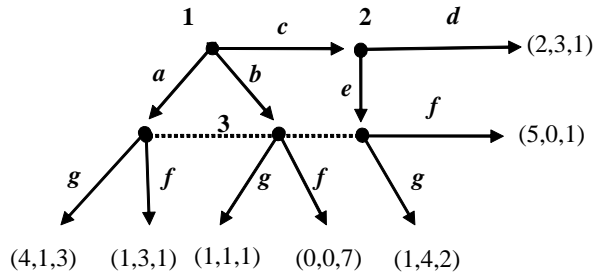
(a) Imaginons que Dell s'engage par écrit à produire, après avoir observé la production de Compaq, 42 unités de micro-ordinateurs. Que choisirait alors de produire Compaq s'il prêtait foi en l'engagement de Dell ? Etant donné ce choix de Compaq, Dell aurait-il intérêt à produire ses 42 unités ?.

(b) Montrer que la situation étudiée en (a) n'est pas parfaite en sous-jeu. Déterminer l'unique équilibre parfait en sous-jeu de ce jeu (souvent appelé "équilibre de Stackleberg").

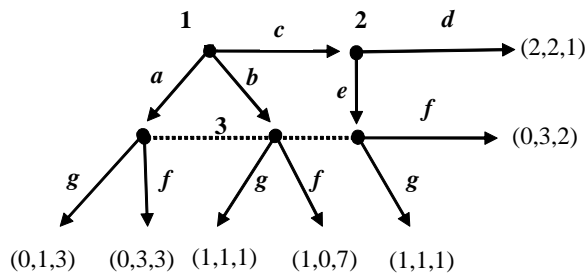
(c) Illustrer graphiquement votre réponse. Expliquer pourquoi Dell est victime de son incapacité à s'engager de manière crédible.

**Question 5** Pour les jeux sous forme extensive suivants, déterminer les équilibres de Nash en stratégies pures et indiquer, en justifiant, ceux d'entre eux qui sont des équilibres séquentiels.

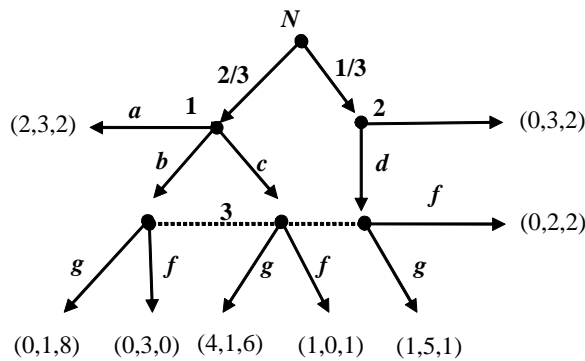
a)



b)



c)



**Question 6** Dans le jeu de la vérité considéré dans la première série d'exercice, l'équilibre dans lequel le joueur 1 déclare pile quelque soit le résultat du jet de la pièce et le joueur 2 annonce face s'il entend pile et annonce pile s'il entend face est-il un équilibre séquentiel ? Qu'en pensez-vous ? Trouvez-vous cet équilibre plausible ?

**Question 7:** La population de travailleurs que peut considérer pour l'embauche la direction des ressources humaines d'un organisme public (où existe une sécurité d'emploi) se divise en deux catégories: Les talentueux et les incapables. L'entreprise n'est pas en mesure, sur la base d'un simple entretien, de savoir si un travailleur est talentueux ou incapable. L'embauche d'un travailleur incapable apporte à l'organisme 100 unités de numéraire. L'embauche d'un travailleur talentueux apporte pour sa part une valeur de 300. Un travailleur talentueux refuse de travailler à un salaire inférieur à 150 tandis qu'un travailleur incapable accepte de travailler à tout salaire non-négatif. L'organisme public a la possibilité de faire dépendre les salaires versés de l'acquisition de diplômes

qui sanctionnent un certain nombre d'années passées à l'université à apprendre péniblement des choses inutiles. L'équivalent monétaire du coût psychologique supporté pendant  $x$  années d'études est de  $10x$  pour un individu talentueux et de  $20x$  pour un incapable. La direction des ressources humaines estime à  $p \in [0, 1]$  la fraction de travailleurs qui sont incapables.

(a) En supposant que l'entreprise soit neutre par rapport au risque, quelle est la plus grande valeur de  $p$  qui rendrait rationnelle, pour l'entreprise, le paiement à tous les travailleurs d'un même salaire tout en incitant les travailleurs talentueux à offrir leurs services ?

(b) Déterminer la meilleure (en terme de surplus réalisé sur chaque type de travailleur) politique salariale basée sur le diplôme que pourrait choisir l'entreprise (sous contrainte d'incitation à révéler le type de chaque travailleur).