Théorie des jeux, Master AE2 et magistère 2, 1ère série d'exercices, Solutions

December 12, 2010

Question 1 Démontrer heuristiquement les énoncés suivants:

(1) S'il existe une unique combinaison de stratégies qui résulte d'une procédure d'élimination itérative de stratégies faiblement dominées, alors cette combinaison est nécessairement un équilibre de Nash.

Preuve: Par l'absurde supposons que $(x_1^*, ..., x_n^*)$ soit l'unique combinaison de stratégies d'un jeu sous forme normale à n joueurs qui ait résisté à une procédure d'élimination itérative de stratégies faiblement dominées et qu'elle *ne soit pas* un équilibre de Nash. Il existe donc un joueur i et une stratégie $\widehat{x}_i$ pour ce joueur tels que $U_i(\widehat{x}_i; x_{-i}^*) > U_i\ (x_i^*; x_{-i}^*)$. Mais puisque $(x_1^*, ..., x_n^*)$ est l'unique combinaison de stratégies qui a résisté à une procédure d'élimination itérative de stratégies faiblement dominées, cela signifie que la stratégie $\widehat{x}_i$ a été éliminée à une étape de la procédure d'élimination itérative de stratégies faiblement dominées. Cela signifie donc qu'il existe des sous-ensembles $\widetilde{S}_j$ de l'ensemble des stratégies S_j (pour $j = 1, ..., n$), chacun contenant x_j^*, tels que $U_i(\widehat{s}_i\ ; s_{-i}) \leq U_i(s_i\ ; s_{-i})$ pour tout $s_i \in \widetilde{S}_i$ et pour tout $s_{-i} \in \times_{j\neq i}\widetilde{S}_j$. Mais cela est incompatible avec le fait que $U_i(\widehat{x}_i; x_{-i}^*) > U_i\ (x_i^*; x_{-i}^*)$.

(2) S'il existe une unique combinaison de stratégies qui résulte d'une procédure d'élimination itérative de stratégies strictement dominées (et ce à chaque étape de la procédure d'élimination), alors cette combinaison constitue l'unique équilibre de Nash du jeu.

Preuve: Par la proposition précédente nous savons que si une procédure d'élimination itérative de stratégies faiblement dominées (et en particulier donc, une procédure d'élimination itérative de stratégies strictement dominées) conduit à la sélection d'une seule combinaison de stratégie, la dite combinaison est un équilibre de Nash. Nous devons montrer maintenant que, sous l'hypothèse où la procédure élimine, à chaque étape du jeu, des stratégies strictement dominées, elle sélectionnera l'unique équilibre de Nash du jeu si elle sélectionne une unique combinaison de stratégies. Par l'absurde, supposons que $(x_1^*, ..., x_n^*)$ soit l'unique combinaison de stratégies qui ait résisté à une procédure d'élimination itérative de stratégies strictement dominées et qu'il existe une combinaison de stratégies $(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n)$ qui soit également un équilibre de Nash du jeu. Puisque $(x_1^*, ..., x_n^*)$ est l'unique combinaison de stratégies qui ait résisté à une procédure d'élimination itérative de stratégies strictement dominées, il existe une étape de la procédure d'élimination où les ensembles de stratégies restantes pour chaque joueur i étaient $\widetilde{S}_i$ (contenant évidemment x_i^*) et où, pour un joueur $h, \widehat{x}_h \in \widetilde{S}_h$. Considérons, parmi ces étapes, la plus tardive possible (à partir du début de la procédure) qui conserve, dans les ensembles $\widetilde{S}_i$, toutes les stratégies $\widehat{x}_i$ (pour $i = 1, ..., n$) qui soient distinctes de x_i^* (il existe au moins une de ces stratégies si la combinaison $(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n)$ est distincte de $(x_1^*, ..., x_n^*)$). Appelons $\widehat{x}_h$, l'une des stratégies $(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n)$ qui sera éliminée au terme de cette étape. Puisqu'elle est strictement dominée par une autre stratégie $\widetilde{x}_h$ au cours de cette étape pour h, on a que $U_h(\widetilde{x}_h; x_{-h}) > U_h(\widehat{x}_h; x_{-h})$ pour tout $x_{-h} \in \times_{k\neq h}\widetilde{S}_k$. Puisque $\widehat{x}_{-h} \in \times_{k\neq h}\widetilde{S}_k$, on a donc que $U_h(\widetilde{x}_h; \widehat{x}_{-h}) > U_h(\widehat{x}_h; \widehat{x}_{-h})$, ce qui contredit l'hypothèse suivant laquelle $(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n)$ est un équilibre de Nash.

(3) Si une combinaison de stratégies est un équilibre de Nash, alors aucune stratégies n'est strictement dominée. Montrer par un exemple que l'énoncé est faux si on remplace "strictement" par "faiblement".

Preuve: Supposons que dans une combinaison de stratégies $(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n)$, la stratégie $\widehat{x}_j$ soit strictement dominée par une stratégie $\widetilde{x}_j$ pour un joueur j. On a donc $U_j(\widetilde{x}_j; x_{-j}) > U_h(\widehat{x}_j; x_{-j})$

pour toute combinaison de stratégies x_{-j} que peuvent jouer les autres joueurs et, en particulier, pour la combinaison de stratégies $\widehat{x}_{-j}$. Mais alors, on ne peut évidemment pas avoir $U_j(\widehat{x}_j; \widehat{x}_{-j}) \geq U_j(x_j; \widehat{x}_{-j})$ pour tout x_j. Il est donc exclu que $(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n)$ soit un équilibre de Nash. Comme contre exemple de la deuxième partie de la proposition, on peut considérer l'exemple suivant (où (*haut*, *gauche*) est un équilibre de Nash même si *haut* est faiblement dominée par *bas* pour le joueur 1 et *gauche* est faiblement dominée par *droite* pour le joueur 2.

		joueur 2	
		gauche	droite
joueur 1	haut	2,3	1,3
	bas	2,0	2,2

Question 2 On considère le jeu à deux joueurs sous forme normale suivant

		joueur 2		
		gauche	milieu	droite
joueur 1	haut	4,3	2,7	0,4
	centre	5,5	5,-1	0,-2
	bas	3,3	1,1	-1,7

(a) Que choisira de faire chacun des joueurs ? Sur quel concept de solution est basée votre réponse.

Réponse: On remarque d'abord que les stratégies "bas" et "haut" du joueur 1 sont dominées par la stratégie "centre" de ce joueur (la domination étant stricte pour "bas" et faible pour "haut"). Eliminant par rationalité forte ces 2 stratégies et étant convaincu que 1 jouera "centre", on constate immédiatement que la stratégie "gauche" du joueur 2 domine strictement chacune de ses deux autres stratégies. Par élimination itérative de stratégies dominées, on prédit donc que le joueur 1 jouera "centre" et le joueur 2 jouera "gauche".

(b) Même question avec le jeu légèrement modifié suivant:

		joueur 2		
		gauche	milieu	droite
joueur 1	haut	2,3	1,5	2,4
	centre	5,2	4,-1	-2,-2
	bas	3,0	2,1	-1,3

Réponse: La stratégie "bas" du joueur 1 est dominée par une mixture des stratégies "centre" et "haut" avec, par exemple, une probabilité 1/2 de jouer chacune de ces deux stratégies. Le joueur 1 ne jouera donc pas "bas". Dans le jeu réduit où 1 ne joue pas "bas", la stragégie "droite" du joueur 2 est dominée strictement par une mixture de ses stratégies "milieu" et "gauche" (par exemple en jouant "milieu" avec probabilité 2/3 et "gauche" avec probabilité 1/3, le joueur 2 obtient un paiement (espéré) strictement plus grand que celui qu'il obtiendrait en jouant "droite" et ce , quoique fasse le joueur. 1 Mais si le joueur 2 ne joue pas "droite", on remarque que la stratégie "centre" du joueur 1 domine, pour ce joueur, sa stratégie "haut". Le joueur 1 choisira donc "centre". Sachant cela, le joueur 2 choisira "gauche".. (*centre*,*gauche*) est donc l'unique combinaison de stratégies qui survit à une procédure finie d'élimination itérative de stratégies (mixtes) dominées.

Question 3 Deux entreprises sont en concurrence pour la production d'un bien unique. L'entreprise 1 a une fonction de coûts $C_1(q_1) = 5q_1 + q_1^2$ tandis que l'entreprise 2 a une fonction de coûts

$C_2(q_2) = q_2 + 4q_2^2$. La fonction de demande pour le bien produit par ces deux firmes est $Q = 150 - 2p$ où p est le prix. Trouver les quantités produites, le prix demandé et les profits réalisés par chacune des deux firmes en supposant que les firmes choisissent l'unique combinaison de quantités produites qui passe le test de l'élimination itérative de stratégies dominées. Faire un graphique pour illustrer le raisonnement.

Réponse: Remarquons d'abord que la situation décrite est bien un jeu sous forme normale avec $N = \{1, 2\}$ et, pour $i = 1, 2$, $A_i = \mathbb{R}_+$ et $U_i : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ définie par $U_i(q_i, q_j) = (75 - \frac{q_i - q_j}{2})q_i - C_i(q_i)$. Remarquons également que U_i est concave en q_i (pour q_j fixé) car $U_i'' = -1 - C_i''(q_i) \leq 0$ si $C_i''(q_i) \geq 0$, ce qui est le cas ici. Par ailleurs $U_i(0, q_j) = 0$ pour tout q_j et $U_i'(0, q_j) = 75 - \frac{q_j}{2} - C_i'(0) > 0$ si $0 \leq q_j < 150$. Finalement nous remarquons que $U_i(150 - q_j, q_j) = 0 - C_i(150 - q_j) < 0$ si $0 \leq q_j < 150$. En clair, la fonction de paiement U_i est concave par rappport à q_i, prend une valeur de 0 à 0, croît ensuite pour redevenir négative pour des valeurs de q_i supérieures à $150 - q_j$. La fonction de paiement de paiement du joueur i est donc **unimodale**. Pour cette raison, quelque soient q_i, q_i' et q_i'', le fait d'avoir $q_i < q_i' < q_i''$ et $U_i(q_i', q_j) < U_i(q_i'', q_j)$ implique $U_i(q_i, q_j) < U_i(q_i', q_j)$ et le fait d'avoir $q_i > q_i' > q_i''$ et $U_i(q_i', q_j) > U_i(q_i'', q_j)$ implique $U_i(q_i, q_j) > U_i(q_i', q_j)$.Ceci étant noté, nous déterminons, pour chaque joueur, la **meilleure réponse** à la stratégie de l'adversaire en remarquant que, du fait de cette unimodalité, si une stratégie d'un joueur n'est la meilleure réponse à aucune stratégie de son adversaire, une telle stratégie est strictement dominée (pourriez vous prouver cela ?). On trouve la fonction de meilleure réponse d'une entreprise en résolvant le programme suivant:

$$\max_{q_i}(75 - \frac{(q_1 + q_2)}{2})q_i - C_i(q_i)$$

qui nous donne (en utilisant les habituelles conditions de premier ordre et en utisant la fonction de coût appropriée à chaque entreprise).

$$\begin{aligned} q_1 &= r_1(q_2) = \frac{70}{3} - \frac{q_2}{6} \Leftrightarrow \\ r_1^{-1}(q_1) &= 140 - 6q_1 \end{aligned}$$

et

$$q_2 = r_2(q_1) = \frac{74}{9} - \frac{q_1}{18} \Leftrightarrow$$

On remarque que l'intervalle de stratégies envisageables pour chaque joueur est $[0, 75]$ (produire plus que 75 pour chaque joueur entrainerait un prix négatif). Par ailleurs, en analysant $r_1(.)$ du joueur 1, on remarque que l'intervalle des meilleures réponses à des choix envisageables par le joueur 2 est donnée par l'intervalle $[\frac{140-75}{6}, \frac{70}{3}] = [\frac{65}{6}, \frac{70}{3}]$. N'importe quelle stratégie envisageable du joueur 1 contenue dans les intervalles $[0, \frac{65}{6}[$ et $]\frac{70}{3}, 75]$ est donc strictement dominée par au moins une stratégie de l'intervalle $[\frac{65}{6}, \frac{70}{3}]$. En restreignant l'ensemble des stratégies envisageables du joueur 1 à l'intervalle $[\frac{65}{6}, \frac{70}{3}]$, on remarque, en examinant $r_2(q_1)$, que l'ensemble des meilleures réponses de 2 aux choix envisageables restants de 1 est donnée par $[\frac{74}{9} - \frac{70}{54}, \frac{74}{9} - \frac{65}{108}] = [\frac{374}{54}, \frac{823}{108}] = [\frac{187}{27}, \frac{823}{108}]$. On en est donc conduit à la conclusion que toutes les stratégies envisageables de 2 qui n'appartiennent pas à $[\frac{187}{27}, \frac{823}{108}]$ peuvent être éliminées. En restreignant le choix des stratégies envisageables de 2 à l'intervalle $[\frac{187}{27}, \frac{823}{108}]$, on en est conduit à éliminer, parmi les stratégies de 1 appartenant à $[\frac{65}{6}, \frac{70}{3}]$, celles qui ne sont pas des meilleures réponses aux stratégies envisageables de 2 contenues dans $[\frac{187}{27}, \frac{823}{108}]$. En continuant la procédure de cette manière, on en est conduit à sélectionner la paire de stratégies q_1^*, q_2^* définie par

$$q_2^* = \frac{74}{9} - \frac{q_1^*}{18}$$

et

$$q_1^* = \frac{70}{3} - \frac{q_2^*}{6}$$

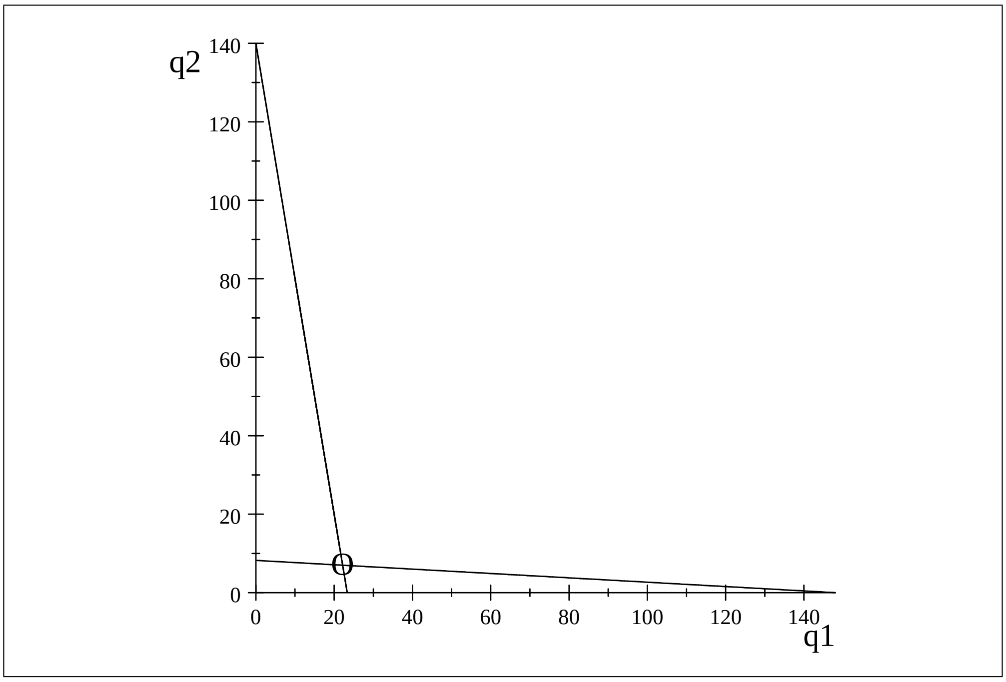
soit

$$q_1^* = \frac{7101}{321} = \frac{2367}{107}$$

et

$$q_2^* = \frac{678}{107}$$

Voici le dessin des deux fonctions de meilleures réponses ($r^{-1}(q_1)$ pour le joueur 1) avec une indication approximative de leur point de croisement.



Question 4 Deux adolescents masculins s'amusent à jouer à la "poule mouillée" en roulant à 100kms/heure en sens inverse sur une route étroites des Alpes du Sud. Chacun a le choix entre deux stratégies: foncer ou se ranger sur une aire de stationnement. Le premier adolescent qui se range sur l'aire alors que l'autre fonce en sens inverse passe pour une poule mouillée tandis que l'autre passe pour un homme viril. Si les deux adolescents choisissent de se ranger en même temps, aucun des deux ne passe pour une poule mouillé mais aucun ne passe pour un homme viril. Si aucun des deux ne choisit de se ranger, tous les deux périssent dans la violente collision qui s'en suivra.

(a) Représenter le problème de décision auquel sont confrontés les adolescents sous la forme d'un jeu sous forme normale.

Réponse: exemple:

	Foncer	*Se ranger*
Foncer	-1000,-1000	+1,-1
Se ranger	-1,+1	0,0

(b) Déterminer tous les équilibre de Nash en stratégies pures et en stratégies mixtes de ce jeu. Quelle est la probabilité que les deux adolescents restent en vie ?

Réponse:

Il y a deux équilibres de Nash en stratégies pures: $(foncer, \textit{se ranger})$ et $(\textit{se ranger}, foncer)$, mais il sera difficile pour les joueurs de se coordonner sur l'un d'entre eux car leurs intérêts sont opposés. Un autre équilibre de Nash, peut être plus plausible ici, est un équilibre en stratégies mixtes où chaque adolescent masculin choisit une distribution de probabilités sur ses stratégies. Pour être un équilibre de Nash, la distribution de probabilités choisie par l'adolescent masculin i doit rendre l'adolescent masculin j (différent de i) indifférent, en moyenne, entre ses deux stratégies pures. Cette distribution de probabilité est, ici, caractérisée par la probabilité p de foncer définie par:

$$-1000p + 1 - p = -p \Leftrightarrow p = \frac{1}{1000}$$

La probabilité jointe de collision frontale à cet équilibre de Nash est donc de $\frac{1}{1000000}$, ce qui signifie qu'il y a 999999 chances sur un million que les deux adolescents restent en vie. Remarquons combien cette probabilité est sensible à la mesure des paiements en jeu.

Question 5 On considère le jeu sous forme normale à trois joueurs suivant (le joueur 1 choisit une ligne, le joueur 2 choisit une colonne et le joueur 3 choisit une matrice)

	gauche	**droite**
haut	1,2,0	2,1,1
bas	0,1,3	1,0,4

A

	gauche	**droite**
haut	1,1,2	2,3,4
bas	0,0,0	1,2,2

B

	gauche	**droite**
haut	1,0,1	5,1,2
bas	10,6,1	8,4,3

C

Faire une prédiction de l'issue du jeu et indiquer le concept de solution utilisé.

Réponse: La matrice C est faiblement dominée, pour le joueur 3, par une mixture 1/2 1/2 de A et B . Si 3 ne joue pas la matrice C, la stratégie *bas* du joueur 1 est strictement dominée par la stratégie *haut*. Si le joueur 1 joue *haut*, la stratégie *droite* du joueur 3 domine strictement la stratégie *gauche*. Finalement, confronté aux cases *haut*, *droite* des matrices A et B, le joueur 3 choisira la matrice B. On aura donc, comme unique résultat d'une procédure d'élimination des stratégies dominées, la combinaison $(haut, droite, B)$ qui sera sélectionnée.

Question 6. Archibald, Irma et Nestor veulent faire un cadeau à leur camarade Bianca qui part en congé de maternité. Ils doivent mettre une somme d'argent dans une enveloppe scellée et donner cette enveloppe à leur secrétaire qui se chargera d'acheter le cadeau. Archibald, Irma et Nestor disposent, respectivement, d'un montant maximal de 100, 200 et 300 euros à consacrer à ce cadeau. Les préférences d'Archibald, Irma et Nestor pour le bien privé (dont la quantité est désignée par x) et la valeur du cadeau donné à Bianca (désignée par Z) sont représentées, respectivement, par les fonctions d'utilité $U_A(.)$, $U_I(.)$ et $U_N(.)$ suivantes

$$U_A(x, Z) = x^{\frac{1}{2}} Z^{\frac{1}{2}} = U_I(x, Z)$$

et

$$U_N = 2Z^{\frac{1}{2}} + x$$

(a) Quelle contribution au cadeau de Bianca choisiront de faire Archibald, Irma et Nestor à l'équilibre de Nash ?

Réponse: Pour trouver l'équilibre de Nash, il faut d'abord trouver les fonctions de meilleure réponse de chacun des trois joueurs. La fonction de meilleure réponse d'Archibald ou d'Irma (étant données les contributions des deux autres) est définie comme étant la solution du programme suivant:

$$\max_{c_i \in [0, W_i]} (W_i - c_i)^{\frac{1}{2}} (c_i + c_{-i})^{\frac{1}{2}}$$

où c_i (pour $i = A, I$) désigne la contribution de i, c_{-i} désigne la somme des contributions des deux autres joueurs que i et W_i désigne la richesse de i.. Si la meilleure réponse $c_i^*(c_{-i})$ de i à la somme des contributions des autres est positive, elle satisfait nécessairement la condition de premier ordre:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(W_i - c_i^*(c_{-i}))^{\frac{-1}{2}}(c_i^*(c_{-i}) + c_{-i})^{\frac{1}{2}} & \\ +\frac{1}{2}(W_i - c_i^*(c_{-i}))^{\frac{1}{2}}(c_i^*(c_{-i}) + c_{-i})^{\frac{-1}{2}} &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ c_i^*(c_{-i}) + c_{-i} &= W_i - c_i^*(c_{-i}) \\ &\Leftrightarrow \\ c_i^*(c_{-i}) &= \frac{W_i}{2} - \frac{c_{-i}}{2} \end{aligned}$$

si $\frac{W_i}{2} - \frac{c_{-i}}{2} > 0$ et $c_i^*(c_{-i}) = 0$ autrement. Cela nous donne:

$$c_A^*(c_I + c_N) = 50 - \frac{1}{2}(c_I + c_N)$$

si $50 > \frac{1}{2}(c_I + c_N)$ et $c_A^*(c_I + c_N) = 0$ autrement pour Archibald et:

$$c_I^*(c_A + c_N) = 100 - \frac{1}{2}(c_I + c_N)$$

si $100 > \frac{1}{2}(c_A + c_N)$ et $c_I^*(c_A + c_N) = 0$ autrement pour Irma. Pour Nestor, la contribution optimale (étant données les contributions des autres) résout:

$$\max_{c_N \in [0, 300]} 2(c_A + c_I + c_N)^{\frac{1}{2}} + 300 - c_N$$

et, si elle est positive, satisfait la condition de premier ordre:

$$\begin{aligned} (c_A + c_I + c_N^*(c_A + c_I))^{\frac{-1}{2}} - 1 &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ c_N^*(c_A + c_I) &= 1 - c_A - c_I \end{aligned}$$

si $1 - c_A - c_I > 0$ et $c_N^*(c_A + c_I) = 0$ autrement. A l'évidence, cette dernière éventualité paraît la plus la plus vraisemblable: Dès lors que la somme des contributions d'Archibald et Irma excède 1, Nestor ne souhaite plus contribuer. Déterminons donc d'abord l'équilibre de Nash en se plaçant dans le cas de figure où Nestor ne contribue pas et où les seuls contributeurs sont Archibald et Irma. Si, dans ce cas de figure, Archibald et Irma contribuent plus d'un euro à eux deux, nous en concluerons que ce cas de figure est, en fait, l'équilibre de Nash. Si nous trouvons des niveaux de contribution d'Archibald et Irma inférieurs à 1, nous devront en conclure que ce cas de figure ne correspond pas à un équilibre de Nash et nous devrons alors inclure Nestor dans l'ensemble des contributeurs et recalculer l'équilibre de Nash sous cette hypothèse.

En l'absence de contributions de la part de Nestor, les fonctions de meilleure réponse d'Archibald et Irma (sous contrainte de positivité) s'écrivent respectivement:

$$c_A^*(c_I) = 50 - \frac{1}{2}c_I$$

et:

$$c_I^*(c_A) = 100 - \frac{1}{2}c_A$$

Les contributions c_A^* et c_I^* qui satisfont simultanément ces deux équations sont $c_A^* = 0$ et $c_I^* = 100$. La somme de ces deux contributions étant supérieure à 1, Nestor ne contribue effectivement pas. Remarquons qu'il n'y a qu'Irma qui contribue positivement au cadeau de Bianca. Les deux autrs "free-ride" sur l'effort contributif d'Irma.

(b) Montrer que les contributions choisies ne sont pas efficaces au sens de Pareto.

Réponse: Montrons qu'il est possible d'améliorer la satisfaction d'un des trois contributeurs sans réduire celle des autres. Fixons l'utilité d'Archibald et de Nestor à ce qu'ils obtiennent à l'équilibre de Nash à savoir $100^{1/2}100^{1/2} = 100$ pour Archibald et $10 + 300 = 310$ pour Nestor. Augmentons la contribution d'Archibald d'un montant ε petit. On peut approximer l'impact de cet accroissement marginal de contribution d'Archibald sur sa variation du de satisfaction par:

$$du = -\frac{1}{2}(100)^{\frac{-1}{2}}(100)^{\frac{1}{2}}\varepsilon + \frac{1}{2}(100)^{\frac{1}{2}}(100)^{\frac{-1}{2}}\varepsilon = 0$$

(parce qu'il a choisi optimalement son effort contributif étant donné celui des autres, Archibald est indifférent entre contribuer un peu plus ou contribuer un peu moins, par définition d'un optimum de contribution). En revanche, on vérifie immédiatement qu'un accroissement, même marginal, augmente la satisfaction d'Irma et de Nestor (puisque cette contribution d'Archibald ne leur demande rien de plus et leur donne un peu plus de bien public). Par conséquent, l'équilibre de Nash ici n'est pas efficace au sens de Pareto.

Question 7 Une nation organisée de manière démocratique comprend 20 millions d'électeurs. Un électeur ne s'intéresse qu'à deux choses: le montant Z des dépenses publiques que choisit le gouvernement et le montant c de sa consommation privée. Chaque électeur i ($i = 1, ..., 20\,000\,000$) dispose d'une richesse monétaire de ω_i. Les préférences de l'électeur i pour les dépenses publiques et la consommation privée sont représentées par la fonction d'utilité $U_i : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$U_i(Z, c) = \alpha_i \ln Z + (1 - \alpha_i) \ln c$$

où $\alpha_i \in]0, 1[$. Les 20 millions d'électeurs se répartissent également entre 5 groupes, définis par la valeur du paramètre α_i, suivant le schéma suivant: $\alpha_i = 1/6$ (1er groupe), $\alpha_i = 1/5$ (2ème groupe), $\alpha_i = 1/4$ (3ème groupe), $\alpha_i = 1/3$ (4ème groupe), $\alpha_i = 1/2$ (5ème groupe). La constitution de cette nation stipule que la dépense publique doit être financée par un impôt sur la richesse privé à taux constant $t \in [0, 1]$ et interdit les déficits ou les excédents publics. Si Z euros de dépenses publiques sont effectués, on doit donc avoir

$$t \sum_{i=1}^{20000000} \omega_i = Z$$

Le taux d'impôt (et donc le montant de la dépense publique) est choisi par un gouvernement élu de manière démocratique. Deux partis politiques s'affrontent au cours des élections: La gauche et la droite. Chaque parti propose aux électeurs un "programme politique" qui, dans ce monde très simple, prend la forme d'un taux d'impôt. Un parti politique ne vise qu'une seule chose: gagner l'élection, ce qu'il fait en proposant un programme qui recueille l'assentiment d'une majorité de citoyens. On représente cet objectif en supposant que le paiement de n'importe lequel des deux partis est 1 si il gagne l'élection et -1 s'il la perd. Tous les citoyens se rendent voter aux élections.

(a) Quels taux d'impôts proposeront les deux partis à leurs électeurs à l'équilibre de Nash de ce jeu électoral ? L'offre de programmes vous paraît-t-elle diversifiée ?

Réponse: Remarquons d'abord que chacun des 5 types d'électeur a un taux de taxe préféré t_i^* qui est la solution du programme suivant:

$$\max_{t_i \in [0,1]} \alpha_i \ln t\omega + (1-\alpha_i)\ln(1-t_i)\omega_i$$

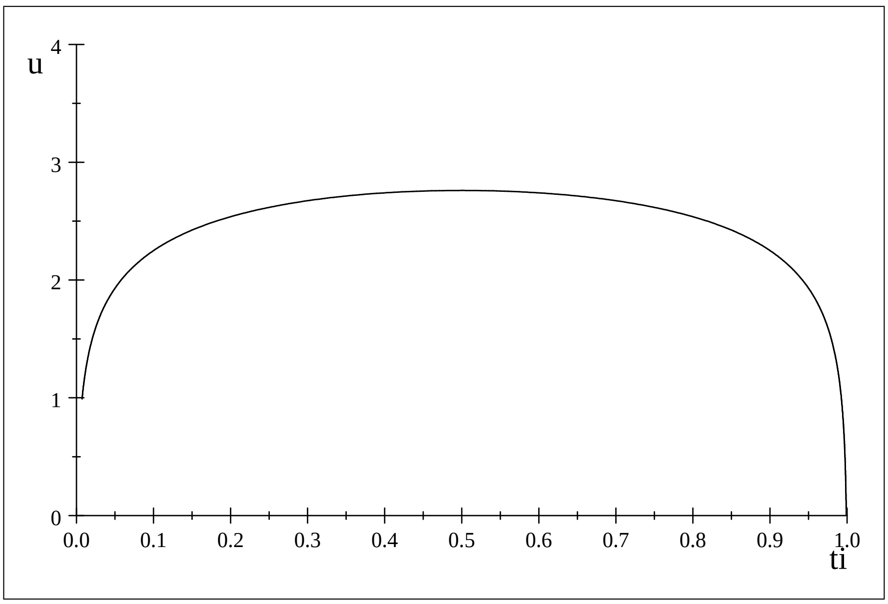
où $\omega = \sum_{j=1}^{20000000} \omega_j$. Si ce taux de taxe est compris strictement entre 0 et 1, il satisfait la condition de premier ordre:

$$\frac{\alpha_i}{t_i^*} - \frac{(1-\alpha_i)}{(1-t_i^*)} = 0$$

et est donc donné par:

$$t_i^* = \alpha_i$$

Remarquons également que ce taux de taxe préféré par l'individu de type i conduit celui-ci à un maximum global (l'utilité de i décroit au fur et à mesure qu'on s'éloigne, par la gauche ou par la droite, de son taux de taxe préféré. Le graphe de l'utilité d'un individu en fonction de i avec $\alpha_i = 1/2$ est montré dans la figure suivante (en supposant $\omega_i = 1$ et $\omega = 1000$)



figure

A l'équilibre de l'équilibre de Nash, les deux partis proposent le taux de taxe préféré de l'électeur médian (celui correspondant à $\alpha_i = 1/4$). Montrons que cette offre politique de taux de taxe est robuste à la déviation unilatérale. Si un parti propose un taux de taxe supérieur à ce taux, étant donné que l'autre offre ce taux, le parti qui dévie garde les votes des 2/5 des électeurs qui ont un taux de taxe en haut du taux de taxe préféré du médian mais perd les votes des 3/5 des électeurs (la catégorie médiane et les 2/5 qui préfèrent que le taux de taxe soit inférieur au taux de taxe préféré du médian). Au contraire rester au médian donne à chacun des deux partie la moitié des électeurs (qui sont alors tous indifférents entre les deux partis). Offrir donc le taux de taxe préféré du médian est un équilibre de Nash. C'est, en fait l'unique équilibre de Nash ici. En effet, considérons une combinaison de stratégies où aucun des deux partis n'offre le taux de taxe du médian. Si le parti A offre un taux de taxe supérieur au parti B qui offre lui même un taux de taxe supérieur au médian, alors le parti A peut gagner 3/5 des voix en offrant un taux de taxe entre celui de B et celui du médian. Le même raisonnement est valable si B offre un taux de taxe inférieur au médian. En offrant un taux de taxe inférieur au médian mais supérieur à celui offert par B, A prend le vote des 1/5 électeurs qui ont le taux de taxe préféré du médian et des 2/5 des électeurs dont le taux de taxe est supérieur au médian et gagne donc ici aussi l'élection. On peut évidemment refaire le raisonnement en inversant les rôles de A et B ou en commençant par mettre A et B en bas du taux de taxe du médian.

L'offre politique n'est donc absolument pas diversifiée: Les deux parties proposent le même taux de 25% et ne se distinguent aucunement. Les électeurs sont, de fait, indifférent entre voter pour l'un ou l'autre des deux partis.

Question 8 La maison Christies de Londre veut vendre la première paire d'escarpins de Madona aux enchères. Il existe n acheteuses potentielles pour cette paire d'escarpins. On désigne par $U_i^1(x)$ et $U_i^0(x)$ le niveau de satisfaction retirée par madame i de x euros de richesses lorsqu'elle est possession des escarpins et lorsqu'elle n'est pas en possession des escarpins respectivement. On suppose évidemment que $U_i^1(x) \geq U_i^0(x)$ pour tout x et que $U_i^j(.)$ est une fonction strictement croissante. Le montant maximal qu'est disposée à payer l'acheteuse i ($i = 1, ..., n$) est v_i. Ce montant v_i est rigoureusement défini par l'identité

$$U_i^1(\omega_i - v_i) \equiv U_i^0(\omega_i)$$

où ω_i désigne la richesse de madame i. La maison Christies de Londre hésite entre deux modes de mise aux enchères sous pli scellé. Dans chacun des deux modes, chaque acheteuse potentielle doit mettre dans une enveloppe à son nom le montant maximal qu'elle est disposée à payer pour la paire d'escarpins. Puis les enveloppes sont ouvertes par le commissaire priseur et la paire d'escarpins est, dans les deux cas, donnée à la personne qui a mis sous enveloppe le montant le plus élevé (si il y a plusieurs personnes a avoir mis sous enveloppe le montant le plus élevé, on tire au hasard parmi elles (suivant une distribution uniforme) celle qui se verra accorder la paires d'escarpins). Par contre les deux modes d'enchères diffèrent par le prix que paie le vainqueur. Dans le premier mode (dite enchères de premier prix), le gagnant paie le montant qu'il a inscrit dans l'enveloppe. Dans le second mode (dite enchères de second prix), le gagnant paie le montant le plus élevé déposé dans l'enveloppe parmi toutes les autres enchérisseuses (si il y a plusieurs vainqueurs, ce montant sera le même que celui mis dans l'enveloppe par n'importe lequel des vainqueurs).

(a) Montrer que dans l'enchère au second prix, mettre dans l'enveloppe sa véritable disposition à payer est, pour chaque enchérisseuse, une stratégie faiblement dominante.

(b) Montrer que, dans l'enchère au premier prix, il n'y a pas de stratégie faiblement dominante. Supposons qu'une enchérisseuse puisse connaître ce qu'ont mis dans leur enveloppe les autres. Dans quels cas pourrait-telle avoir intérêt à mentir sur sa disposition à payer ?

Vu en classe

9) Représenter le jeu du pilote et du terroriste, de la menace à l'entrée et de Sylvester et Tartarin vus en classe sous forme normale et déterminer tous les équilibres de Nash de ces jeux (en stratégies mixtes et en stratégies pures).

Vu en classe.

10) Deux fabricants de jouets A et B envisagent de lancer sur le marché pour la prochaine période de Noël un nouveau jeu vidéo. L'état du marché des jeux vidéo est très incertain. Le marché sera soit *bon* permettant des ventes totales de 20 millions d'unités, ou *mauvais*, avec des ventes de 6 millions d'unités. L'entreprise B, qui possède un excellent service de prévisions économiques, connait l'état du marché. L'entreprise A ne le connaît pas. Elle estime a 60% les chances pour que le marché soit mauvais. La décision de lancer le nouveau jeu entraine un coût fixe de 60 millions d'euros pour l'entreprise B et de 40 millions d'euros pour l'entreprise A. En plus de ces coûts fixes de recherche, le coût moyen de produire un jeu supplémentaire est de 5 euro pour l'entreprise A et de 3 euros pour l'entreprise B. Le prix auquel chaque entreprise pourra vendre son jeu dépend de la concurrence en vigueur sur le marché. Si les deux entreprises décident de mettre sur le marché leur jeu, elle ne pourront en obtenir que 10 euros par unité. Si une seule entreprise décide de mettre en marché son jeu, elle pourra obtenir 12 euros par unité. Si les deux entreprises mettent en marché leur jeu, elles se partageront à part égale le marché, suivant l'état de celui-ci (bon ou mauvais).

(a) Représenter le problème de décision auquel sont confrontés les directions des deux entreprises sous une forme extensive et sous unefa forme normale. Indiquer toutes les formes extensives possibles qui sont susceptibles de représenter ce jeu. Que décidera de faire chaque entreprise ?

(b) Compliquons énormément le problème en supposant maintenant que chacune des deux entreprises peut décider ou non, avant de prendre sa décision de lancer son produit, de faire une étude de marché. Cette étude de marché révélera avec certitude l'état du marché à l'entreprise qui aura décidé de la faire. L'étude de marché coûte 5 millions d'euros. Refaire (a) dans ce cas (en ne représentant qu'une seule des formes extensives possibles; vous trouverez cet exercice un peu "lourdingue"; mais faites le quand même!)

Vu en classe, sauf b qui est facile.

11. Considérons le jeu suivant (appelé parfois "jeu de la vérité"). Ce jeu oppose deux joueurs, 1 et 2, et une maîtresse de jeu. La maîtresse de jeu a une pièce de monnaie truquée de manière telle que, lorsqu'elle est jetée au hasard, elle tombe sur le côté "face" 4 fois sur 5 en moyenne. Ce biais de la pièce est connu des deux joueurs. La maîtresse de jeu jette la pièce et montre le résultat au joueur 1 qui doit, ensuite, annoncer le résultat au joueur 2. Le joueur 1 n'est autorisé qu'à faire l'une des annonces suivantes: "pile" ou "face". Le joueur 2, après avoir entendu l'annonce du joueur 1, doit essayer de deviner le véritable résultat du jet. Le joueur 2 reçoit 1000 euros s'il devine correctement le résultat du jet et ne reçoit rien dans le cas contraire. Le joueur 1 reçoit 2000 euros si le joueur 2 annonce face et ne reçoit rien si le joueur 2 annonce pile. En plus de ces paiements de base, le joueur 1 reçoit une prime de 1000 euros s'il dit la vérité au joueur 2 mais ne reçoit aucune prime s'il lui ment.

(a) Représenter le jeu sous forme normale.

(b) Représenter le jeu sous forme extensive.

(c) Faire une prédiction sur l'issue plausible du jeu.

Réponse: Voir cours sur formes extensives