Une analyse économique de la liberté de choix

Nicolas GRAVEL*

le 10 novembre 2004

Résumé

L'objet de ce chapitre est de faire le point sur l'état de l'art en matière de la mesure, dans le cadre conceptuel de l'économie normative, de la notion de *liberté de choix* individuelle. L'essentiel de la discussion porte sur les tentatives de définir la liberté de choix individuelle qui ne font aucune référence aux motivations qui sont susceptibles d'expliquer l'usage que fera l'individu de cette liberté. La discussion établit également un certain nombre de connections entre les problèmes posées par la définition de la liberté et ceux associés à la définition de la diversité.

"The importance of the formal results lies ultimately in their relevance to normal communication and to things that people argue about and fight for" (Amartya K. Sen)

"Ce qui, de tout temps, a attaché à la liberté le coeur de certains hommes, ce sont ses attraits mêmes, son charme propre, indépendant de ses bienfaits...Qui cherche dans la liberté autre chose qu'elle même est fait pour servir" (Alexis de Tocqueville)

1 Introduction

Depuis la fin des années 80, un certain nombre d'économistes normatifs ont pris au sérieux le souci d'Amartya Sen de ne *pas* baser l'évaluation normative des politiques économiques *uniquement* sur les conséquences que celles-ci peuvent avoir sur le *bien être* des individus. On a, en particulier, défendu l'idée que la *liberté* dont bénéficient ces individus pouvait également être un critère important d'appréciation de ces mêmes politiques. Des plaidoyers philosophiques "modernes" allant dans ce sens peuvent être trouvés chez Arneson ([1], [2]), Berlin [8], Buchanan ([15], [16]), Carter [17], Dworkin [23], Hayek[37], Rawls [65] et Sen ([69], [70], [71]). Cette préoccupation philosophique a irrigué un important effort de recherche destiné à la fois à donner un sens précis à cette notion de liberté individuelle et à examiner comment elle pouvait être combinée au bien être dans l'évaluation de la situation d'un individu. Des articles comme ceux d'Arrow [3], Baharad et Nitzan [6], Bossert, Pattanaik et Xu [12], Bossert [10], Dutta et Sen [22], Foster ([27], [28]),

*CSH - GREQAM - IDEP, 2 Aurangzeb Road, 11 00011 Delhi, India, nicolas.gravel@csh-delhi.com.

Gravel ([33], [34]), Jones et Sugden [41], Klemisch-Ahlert [43], Kreps [49], Nehring et Puppe [52], Pattanaik et Xu ([56], [57], [58], [59]), Puppe ([61], [62], [63], [64]), Romero-Medina [67], Sen ([72], [73], [75]), Sugden [77], Suppes ([78], [79]) et Van Hees [80] constituent des manifestations représentatives de cet effort de recherche.

Dans toutes ces contributions, la liberté *individuelle* est appréhendée à travers le formalisme des *ensembles d'opportunités*. Un ensemble d'opportunités est interprété comme l'ensemble de toutes les options (supposées mutuellement exclusives) qui sont disponibles à un individu et entre lesquelles il peut faire un choix (par exemple à partir de ses préférences). L'ensemble de budget de la théorie du consommateur représente, évidemment, l'exemple privilégié d'ensemble d'opportunités. Mais il en est d'autres comme, par exemple, l'ensemble de toutes les décisions qu'un individu peut prendre dans le cadre de la légalité, ou l'ensemble des candidats disponibles au choix électoral. Le souci principal de cette littérature est de savoir comment *classer* ces ensembles d'opportunités d'une manière qui traduise le plus fidèlement possible la signification de l'énoncé "offre au moins autant de liberté de choix que".

Il est, sans doute, important de noter que cette manière d'envisager la liberté restreint le sens donné au concept en limitant celui-ci à l'aspect "*liberté de choix*". En particulier donc, l'approche de la liberté explorée dans cette littérature n'apparaît pas spontanément adéquate pour rendre compte d'autres conceptions plausibles de cette notion comme celle, d'inspiration Kantienne, qui appréhende la liberté comme le résultat de l'exercice d'une volonté autonome. [1]

Quoiqu'il en soit, la présentation de ce chapitre vise à donner un apperçu synthétique de l'"état de l'art" en matière de modélisation économique de la liberté de choix individuelle. Dans la mesure du possible, on privilégiera une présentation heuristique générale plutôt qu'un énoncé méticuleux de tous les axiomes et théorèmes obtenus.[2] Un souci de garder la présentation dans une dimension acceptable nous obligera, en outre, à limiter à l'approche dite *naïve* de la mesure de la liberté individuelle. Cette approche, illustrée notamment par les contributions de Klemisch-Ahlert [43], Jones et Sugden [41], Pattanaik et Xu ([56], [59]), Suppes ([78], [79]), Xu [86] et Van Hees [80], se consacre au problème pur de définition de la liberté de choix en identifiant les propriétés que devrait satisfaire un classement des ensembles d'opportunités individuels qui soit cohérent avec l'énoncé "offre au moins autant de liberté que". L'approche considérée est qualifiée de "naïve" dans le sens le plus noble qui peut être donné à ce terme : celui de *ne pas préjuger à l'avance* des éventuelles raisons qu'on peut avoir, ou que peut avoir l'individu, de valoriser la plus

[1]

> "La volonté est une sorte de causalité des êtres vivants, en tant qu'ils sont raisonnables et la liberté serait la propriété qu'aurait cette causalité de pouvoir agir independamment de causes étrangères qui la déterminent" (E. Kant ([42], 3ème section, p. 179).

On trouvera une discussion assez riche de cette conception Kantienne de la liberté dans Kolm ([45], [44]) et une tentative récente de formalisation dans Van Hees [82].

[2] On trouvera un exposé plus technique de ces résultats dans la quatrième section de Barberà, Bossert et Pattanaik [7].

ou moins grande liberté qu'offrent les ensembles d'opportunités. Un critère de comparaison d'ensembles qui apparaît souvent dans cette perspective est le fameux *critère cardinal* suivant lequel la liberté offerte par un ensemble d'opportunités est précisément définie par le nombre d'options que cet ensemble contient. Le critère cardinal souffre, évidemment, du défaut d'être insensible à la dissimilitude entre les options présentes. On profitera donc de cette discussion pour relier la définition de la liberté à celle, très discutée dans la littérature récente, de la *diversité*.

La présentation ne traitera donc pas des quelques tentatives (faites notamment par Baharad et Nitzan [6] Bossert, Pattanaik et Xu [12], Bossert [10], Gravel ([33], [34]), Puppe ([61], [62]) ou [73]) d'examiner les possibilités qu'il peut y avoir de combiner des préoccuppations libertaires "naïves" avec des préoccupations, plus traditionnelles en économie, de satisfaction des préférences que l'individu peut avoir pour les options contenues dans les ensembles. Elle n'abordera pas non plus la question, étudiée par exemple par Arrow [3], Foster ([27], [28]), Kreps [49], Nehring et Puppe [52], Pattanaik et Xu [57], Puppe [63], Romero-Medina [67] et Sugden [77], d'expliquer de manière moins naïve, le souci libertaire par une *indétermination* de l'individu par rapport aux préférences qu'il peut utiliser pour faire ses choix.

Il est, en outre, important de voir que la littérature couverte par ce chapitre traite de la mesure de la liberté *individuelle*, dans un contexte *non-interactif*. Elle appelle donc son dépassement dans deux directions, insuffisamment explorées jusqu'ici, et dont la synthèse approfondie sort, elle aussi, du cadre du présent exercice.

La première de ces directions concerne la manière avec laquelle *les* libertés des uns et des autres pourraient être comparées pour donner lieu à des comparaisons d'*allocations d'opportunités* entre individus. L'insuffisant développement de cette avenue de recherche est d'autant plus surprenante qu'on trouve, dans les débats "populaires" ou philosophiques (voir par exemple Arneson [1], Dworkin [23], Cohen ([18], [19]), Fleurbaey ([25], [26]), Roemer [66] ou Sen [74], de nombreux playdoyers en faveur de l'"égalité des chances", plutôt que de celle des "résultats" ou des "utilités", comme conception adéquate de l'idéal égalitaire. Il aurait été évidemment intéressant de discuter les quelques rares contributions (e.g. Bossert, Fleurbaey et Van de Gaer [11], Gravel, Laslier et Trannoy ([35], [36], sect. 5), Herrero [38], Herrero, Iturbe, Nieto [39], Kranich ([47], [48]), Ok [54] ou Ok et Kranich [55]) consacrées aux problèmes posés par la comparaison de *distributions d'ensembles d'opportunités* individuels sur la base d'une agrégation des mesures individuelles de liberté.

La deuxième de ces directions, encore moins explorée que la précédente, concerne la prise en compte explicite, à la fois dans les mesures de liberté individuelle et dans leur agrégation au sein d'un classement collectif d'allocations d'opportunités, des *interactions* qui relient les individus les uns aux autres. La prise en compte de ce contexte interactif (dans lequel les conséquences du choix d'un individu dépendent explicitement des choix effectués par d'autres individus) dans la définition et l'agrégation des libertés individuelles est complètement embryonnaire à l'heure actuelle. On peut, ici aussi, s'en étonner, surtout si l'on connaît l'adage suivant lequel "la liberté des uns commence où s'arrête celle des autres". Le point de départ, à mon avis obligé, pour envisager une percée dans cette direction réside dans la littérature qui s'intéresse à la formalisation de la notion de droits individuels dans le cadre de ce qu'on appelle "les formes de jeux" (voir par exemple Deb [20], Deb, Pattanaik et Razzolini [21], Gaertner, Pattanaik et Suzumura [29]), Gardenförs [30] ou Peleg [60] pour des tentatives de formalisation des droits individuels dans ce cadre). Mais toute l'articulation de la formalisation des droits (dans la lignée des travaux pionniers de Sen [68] (voir également Gibbard [31]) avec celle de la liberté reste à faire.

L'organisation du reste de la présentation est la suivante. La prochaine section présente brièvement le cadre conceptuel dans lequel le problème de la mesure de la liberté en économie est posé. La section 3 discute le problème pur de la mesure de la liberté, la section 4 relie ce problème à celui que pose la mesure de la diversité, et la section 5 présente quelques éléments de conclusion.

2 Préliminaires

Le cadre formel considéré dans la littérature postule l'existence d'un ensemble, $\mathbb{X}$, d'*options* jugées importantes pour l'individu dont on cherche à apprécier la liberté. Le cadre abstrait dans lequel le problème de la définition de la liberté est envisagé ne précise pas la nature de ces options et permet donc de multiples interprétations. La plus immédiate d'entre elles, au moins pour un économiste, est d'interpréter une option comme une liste particulière de quantités d'un certain nombre de biens et services. Mais on peut également interpréter $\mathbb{X}$ comme l'ensemble de tous les candidats concevables à une élection, ou comme l'ensemble de tous les modes de transports imaginables pour effectuer un trajet particulier, ou encore l'ensemble de tous les repas qu'on peut envisager de prendre dans tous les restaurants du monde. Quelque soit l'interprétation retenue, les options sont toujours supposées mutuellement exclusives. En outre, même si cette hypothèse n'est pas toujours retenue dans la littérature, et même si elle est susceptible d'avoir une importance non-négligeable dans la dérivation de certains résultats, nous supposerons ici que $\mathbb{X}$ contient un *nombre fini* d'options. Remarquons que si les options sont interprétées comme des listes de quantités (positives ou nulles) d'un certain nombre de biens et services, cette hypothèse revient à considérer que chaque bien ou service ne peut être disponible que dans un nombre fini de quantités possibles. Ce cadre est donc quelque peu éloigné de celui considéré dans l'analyse micro-économique classique où tous les biens sont supposés infiniment divisibles.

On interprète les différents sous-ensembles (non-vides) possibles de $\mathbb{X}$ comme autant d'*ensembles d'opportunités* auxquels peut être confronté l'individu dans les diverses circonstances de son existence. Un ensemble d'opportunités est interprété, on le rappellera, comme l'ensemble des options qui sont disponibles à l'individu et entre lesquelles il doit faire un *choix*. Par exemple, si on interprète les options comme des paniers de biens et services, et si on se limite aux contraintes économiques, on pourra interpréter un ensemble d'opportunités comme l'ensemble de tous les paniers de biens et services dont le coût d'achat, aux prix en vigueur, n'excède pas la richesse dont dispose l'individu. Mais on peut également, si on le souhaite, et toujours dans le cadre de cette interprétation, ajouter aux limitations résultant de la contrainte budgétaire celles qui proviennent des exigences de la conformité à la loi. Si, par exemple, la consommation de certains biens est interdite dans le pays de l'individu dont on évalue la liberté, on devra imposer aux paniers de biens constitutifs de son ensemble d'opportunités la contrainte supplémentaire qu'ils ne contiennent que des *quantités nulles* des biens interdits. Ce dernier exemple suggère qu'on aurait tort de croire que la notion de liberté appréhendée par cette approche est plus proche de celle de liberté "positive", usuellement définie par rapport aux contraintes physiques et économiques qui limitent les choix, que de celle de liberté "négative" chère aux penseurs "libéraux", et qui est souvent définie par rapport aux seules contraintes résultant du fonctionnement des institutions humaines.[3] Dans la mesure, toutefois, où l'ensemble des options qui sont disponibles du fait du fonctionnement des institutions humaines est un sous-ensemble de l'ensemble des options physiquement et économiquement disponibles, il paraît difficile de baser une analyse de la liberté *seulement* sur les contraintes résultant du fonctionnement des institutions humaines. Il faut, au moins, savoir ce qui est physiquement et économiquement disponible pour, ensuite, contraindre d'avantage par la loi. On trouvera une discussion intéressante de l'opposition liberté négative - liberté positive dans le cadre des approches en termes d'ensembles d'opportunités dans Van Hees [80].

L'interprétation donnée au "choix" effectué, dans une étape ultérieure, par l'individu dans l'ensemble d'opportunité n'est pas toujours clarifiée dans la littérature. On peut, évidemment, avoir en tête le résultat d'une délibération souveraine d'une volonté autonome Kantienne, ou de l'exercice d'un "libre arbitre". L'économiste pensera, de manière plus prosaïque, au choix maximisateur d'une relation de préférence, plus ou moins liée au bien être de l'individu. On peut, du reste, penser que la manière avec laquelle on conçoit le processus de choix de l'individu est importante pour apprécier la liberté dont il dispose. Pourtant, le propre des contributions discutées dans ce chapitre est d'essayer de définir la liberté de choix *sans* faire *aucune* référence aux motivations sous-jacentes au choix que cette liberté permet de faire. Pour reprendre la phrase de Tocqueville citée en début de chapitre, on pourrait dire de cette approche qu'elle s'efforce d'identifier "les attraits même et le charme propre" de la liberté, "indépendant de ses bienfaits".

---

[3] La citation suivante illustre bien une manière connue d'opposer liberté négative et liberté positive.

> "..."freedom" refers only to a relation of men to other men, and the only infringement on it is coercion by men. This means, in particular, that the range of physical possibilities from which a person can choose at a given moment has no direct relevance to freedom. The rock climber on a difficult pitch who sees only one way out to save his life is unquestionnably free, though we would hardly say he has any choice" (Hayek [37], p.12)

Une discussion à mon avis plus profonde de ces deux notions peut être trouvée chez Berlin [8].

3 Définir la liberté

Qu'entend on lorsqu'on affirme qu'un ensemble d'opportunités A offre plus de liberté de choix qu'un ensemble d'opportunités B ? Sans faire référence aux motivations de l'individu, au moins deux réponses viennent spontanément à l'esprit.

3.1 La monotonie par rapport à l'inclusion

Une première consiste à lier la liberté à la relation d'*inclusion* d'ensembles : La liberté de choix augmente (ou au moins ne diminue pas) lorsque des options sont ajoutées à un ensemble d'opportunités et elle diminue (ou au moins n'augmente pas) lorsque des options sont soustraites à cet ensemble. Le fait que la liberté *ne diminue pas* lorsque des options sont ajoutées à un ensemble paraît, en effet, être un principe libertaire difficilement contestable. De fait, la conception de la liberté sous-jacente à ce principe, dit de *monotonie faible par rapport à l'inclusion*, est à ce point faible qu'elle est satisfaite même par l'économie normative traditionnelle pour laquelle l'ensemble d'opportunités n'est qu'un moyen de faire un choix maximisateur de préférences (un agent qui optimise ne peut pas perdre du fait d'un élargissement des choix disponibles). Significativement plus forte est l'exigence suivant laquelle l'ajoût (resp. le retrait) d'options à un ensemble augmente (resp. diminue) *strictement* la liberté de choix. De fait, ce principe, dit de *monotonie forte par rapport à l'inclusion*, a fait l'objet de très nombreux commentaires dans la littérature. Beaucoup ont contesté son caractère libertaire en évoquant le fait que l'ajoût, à un ensemble d'opportunités, de certaines options "particulièrement mauvaises"comme, par exemple, la "possibilité de se faire décapiter à l'aube" (Sen [73]), n'augmentait pas nécessairement la liberté de l'individu.

Il semble, toutefois, que ce type de critique, qui fait référence à la valeur de l'option du point de vue des motivations plausibles qui gouverneront le choix de l'individu, s'adresse d'avantage à la démarche générale de définition de la liberté sans référence aux motivations du choix qu'à l'adéquation du principe de monotonie par rapport à l'inclusion à traduire des considérations libertaires *dans le cadre* de cette démarche. Il semble, après tout, difficilement contestable que l'ajoût d'options à un ensemble d'opportunités, pour autant que l'individu garde la possibilité de choisir ou de ne pas choisir ces options, augmente strictement sa liberté de choix. Si on me donne la liberté de me faire, à ma demande expresse, décapiter à l'aube, n'augmente t-on pas strictement la liberté dont je dispose de mettre fin à mes jours de la manière que j'ai choisi ?

Une critique plus pertinente des principes de monotonie par rapport à l'inclusion réside dans leur caractère incomplet. En prenant l'exemple des moyens de transports disponibles à un individu pour effectuer un certain déplacement, ces principes sont, à eux seuls, incapables de comparer des ensembles d'opportunités tels que {*aller à pied*, *aller en vélo*} et {*aller à pied*, *aller en bus*, *aller en métro*, *aller en voiture*}. Notons toutefois que si cette incomplétude peut être sérieuse dans des comparaisons de liberté de choix de modes de transport, elle l'est moins si on s'intéresse à la comparaison d'ensembles de budget entre des individus confrontés au même système de prix. En effet, dans un tel cadre, la comparaison des *richesses* des individus fournit un classement, évidemment complet, de leurs ensembles de budget qui coïncide avec l'inclusion de ces mêmes ensembles. On peut donc dire que, s'agissant des seules opportunités budgétaires, et lorsque utilisée pour comparer des individus confrontés aux mêmes prix des biens et services, la richesse constitue une mesure exacte de la liberté définie par l'inclusion d'ensembles.

3.2 Le critère cardinal

Le deuxième critère de comparaison d'ensembles qui vient à l'esprit est le *nombre d'éléments* que ces ensembles contiennent. Ce critère, dit *cardinal*, ne peut être défini que si, comme nous l'avons supposé ici, les ensembles d'opportunité contiennent un nombre fini d'options.[4] Le critère cardinal satisfait évidemment le principe de monotonie forte par rapport à l'inclusion (l'ajout d'options à un ensemble augmente le nombre de ses éléments) mais va beaucoup plus loin que ce dernier en permettant la comparaison de n'importe quelle paire d'ensembles. Le critère cardinal fournit, de fait, une réponse complète à la question : Quand peut-on dire que l'ensemble d'opportunités A offre plus de liberté de choix que l'ensemble d'opportunités B ?

Doit-on se contenter de cette réponse ? Hayek [37], sur la base d'arguments assez informels, et lorsqu'il parlait du concept de liberté positive qu'il opposait à celui de liberté négative, semblait croire que oui.[5] Mais le mérite de fournir des justifications axiomatiques précises au critère cardinal revient à Jones et Sugden [41], Suppes [78] et Pattanaik et Xu [56]. C'est la caractérisation axiomatique de ces derniers auteurs, qui a fait l'objet d'une abondante discussion, que nous retiendrons pour les fins de la présente discussion. Pattanaik et Xu proposent de traduire l'"intuition" libertaire de tout un chacun au moyen de trois axiomes que devrait satisfaire tout critère de comparaison d'ensembles d'opportunités sur la base de leur liberté de choix. Notons respectivement par $A \succeq B$, $A \succ B$ et $A \sim B$ les énoncés "A offre au moins autant de liberté que B", "A offre strictement plus de liberté que B" et "A offre exactement autant de liberté que B". Les axiomes proposés par Pattanaik et Xu sont les suivants :

Axiome 1 *(Indifférence entre les situations de non-choix) Pour toutes options x et y dans $\mathbb{X}$, $\{x\} \sim \{y\}$.*

---

[4] Des généralisations du critère cardinal à des ensembles contenant un nombre infini d'éléments ont cependant été proposées par Pattanaik et Xu [59] et par Xu [86].

[5]

> "The question of *how many course of actions are open to a person* is, of course, very important. But it is a different question from that of how far in acting he can follow his own plan and intentions, to what extent the pattern of his conduct is of his own design, directed toward ends for which he has been persistently striving rather than toward necessities created by others in order to make him do what they want". (p. 13, mes italiques)

Axiome 2 *(Préférence stricte du choix au non-choix) Pour toutes options distinctes x et y dans $\mathbb{X}$, $\{x, y\} \succ \{x\}$.*

Axiome 3 *(Indépendence) Pour n'importe quels ensembles d'opportunités A, B et C tels que $A \cap C = B \cap C = \emptyset$, $A \succeq B \Longleftrightarrow A \cup C \succeq B \cup C$*

Le premier axiome stipule que, comme incarnation d'absence de liberté de choix, tous les ensembles ne contenant qu'un seul élément, et n'offrant donc *aucune* possibilité de choix, se valent. Remarquons que la nature de l'option que l'individu est "forcé de choisir" dans chacune des "situations de non-choix" n'affecte pas ce verdict : Que l'individu soit forcé de consommer un verre du plus grand cru bordelais, ou un sceau d'eau de mer, les deux situations seront jugées équivalentes en terme (d'absence) de liberté de choix. Cet aspect du principe d'*Indifférence entre les situations de non-choix* a fait l'objet de critiques extensives, notamment de la part de Sen ([72], [73]) sur lesquelles nous reviendrons.

Le deuxième axiome requiert du critère libertaire qu'il considère tout ensemble permettant de faire un choix non trivial entre deux options distinctes comme offrant plus de liberté qu'un ensemble qui force l'individu à se saisir d'une de ces deux options. Cet axiome n'est rien d'autre qu'un affaiblissement du principe de monotonie stricte par rapport à l'inclusion aux ensembles d'opportunités pour lesquels l'intuition libertaire de tout un chacun est la plus forte à savoir : les *singletons*, qui traduisent l'absence de possibilité de choix, et les *paires* qui, en opposant deux alternatives, constituent la manifestation la plus simple du "choix".

Moins naturelle, et pour cette raison plus contestable, est l'intuition libertaire sous-jacente à l'axiome d'indépendence. Cet axiome affirme, simplement, que le classement libertaire que l'on peut faire de deux ensembles ne sera pas affecté par l'ajout, ou le retrait, d'options communes : Si on ajoute (resp. on retire) les options contenues dans C à (resp. de) deux ensembles A et B, on ne modifie pas le classement relatif de ces deux ensembles en terme de la liberté de choix. Si différence de liberté il y a, celle-ci ne pourra donc provenir que des options contenues dans A et pas dans B ou contenues dans B et pas dans A. L'axiome implique, en particulier, que la contribution de n'importe quelle option à la liberté de choix *ne dépend pas* de l'ensemble auquel cette option est ajoutée ou soustraite. Le caractère contestable de cette *indépendance* est, évidemment, clair, et était apparu tel dès le moyen âge à des auteurs comme Saint-Thomas d'Aquin, qui écrivait (Summa contra Gentiles, III) :[6]

> "Un ange a plus de valeur qu'une pierre. Il ne s'ensuite pas, cependant, que deux anges aient plus de valeur qu'un ange et une pierre"

Quoiqu'il en soit, le critère cardinal satisfait ces trois propriétés. Et, comme l'ont démontré Pattanaik et Xu [56], il est le seul critère réflexif et transitif qui satisfasse ces propriétés. Ce résultat est énoncé formellement dans le théorème suivant.

[6] La citation est tirée de Nehring et Puppe [53] qui l'ont eux même emprunté à [40].

Théorème 1 *$\succeq$ est un critère réflexif et transitif permettant de comparer tous les sous-ensembles non-vides de $\mathbb{X}$ qui satisfait les axiomes d'Indifférence entre les situations de non-choix, de Préférence stricte du choix au non-choix et d'Indépendance si et seulement si $\succeq$ est le critère cardinal.*

L'architecture générale de la démonstration de ce théorème est très simple, et met bien en évidence le rôle joué par les axiomes. Par l'axiome d'*indifférence entre les situations de non-choix*, tous les singletons sont équivalents entre eux. Par l'axiome d'indépendance, ces jugements d'équivalence entre singletons sont préservés par l'ajoût de n'importe quel groupe d'options à deux singletons. Cette observation conduit immédiatement à la conclusion que tous les ensembles contenant le même nombre d'éléments doivent être jugés équivalents en terme de liberté. Pour comparer les ensembles contenant un nombre différent d'options, on utilise l'axiome de *Préférence du choix au non choix* qui, avec la transitivité, nous mène à la conclusion que toute paire est strictement préférable à tout singleton. On applique alors l'indépendance à ce constat pour arriver à la conclusion que tout ensemble contenant un élément de plus qu'un autre lui est préférable, ce qui nous conduit bien au résultat escompté.

Le critère cardinal, et les trois axiomes qui le caractérisent, ont fait l'objet d'abondantes discussions dans la littérature. Si une majorité des auteurs semble d'accord pour dénoncer l'inadéquation du critère comme outil de mesure de la liberté de choix, on en trouve certains, dont Martin Van Hees ([81] ;ch. 6, [80]) qui, à l'instar d'Hayek pour la liberté positive, acceptent globalement le critère cardinal comme outil de mesure de la liberté de choix lorsque celle-ci est envisagée, pour reprendre l'expression de Tocqueville, "indépendamment de ses bienfaits."

3.3 Une généralisation du critère cardinal

Beaucoup de critiques du critère cardinal ont concerné, en fait, les axiomes 1 et 2, et la négation de la valeur des options pour l'individu que ces principes semblent traduire. Elles sont, pour cette raison, l'expression d'une réticence fondamentale à envisager la liberté sans faire référence aux motivations qui gouvernent les choix, et plaident pour des approches de la liberté qui intègre ces motivations. Mais sans entrer dans de telles approches, on peut, au moins, examiner la critique du principe, sous-jacent à l'axiome 1, suivant lesquelles toutes les situations de non choix doivent être forcément considérées comme équivalentes. Toute conception plausible de la liberté devrait-elle accepter ce principe ? Sen ([73], p. 25) a répondu par la négative à cette question sur la base de l'exemple suivant :

> "... suppose you decide to read a particular book, say *Cymbeline*, one Sunday ; You could have chosen any book you had but you chose *Cymbeline*. Consider now an alternative scenario in which you are forced to read another book, say about the reminiscences of a matinee idol, which you would not have chosen to read. Consider a third scenario in which you are given no choice and simply ordered to read *Cymbeline*, which you would have

> chosen to read anyway. There is no question that in the last two scenarios, your freedom is reduced. But it would be absurd to say that your are equally unfree in the two last cases. In the second case, viz., reading the reminiscences of a matinee idol, you are being obliged to read a book you would not have chosen at all, whereas in the second case, viz., reading *Cymbeline*, your are being obliged to read the book you would have chosen to read anyway."

Même si l'exemple de Sen renvoie à l'existence de préférences du décideur pour les livres, et donc à une critique plus globale de l'approche examinée ici, on peut s'interroger sur la pertinence libertaire du principe suivant lequel toutes les situations de non-choix sont équivalentes. Ne pourrait-on pas imaginer un classement libertaire des ensembles d'opportunités qui ne contraigne pas le classement des ensembles ne contenant qu'une seule option ? Une manière de le faire serait d'imaginer que chaque option x de l'ensemble $\mathbb{X}$ se fait donner une pondération numérique $p(x)$ strictement positive reflétant sa valeur pour l'individu. Dans l'exemple de Sen, la pondération maximale pourrait être donnée au livre *Cymbeline*, et la pondération minimale au livre évoquant les souvenirs d'une vedette de feuilleton télévisé populaire. Etant données ces pondérations, on pourrait envisager de classer n'importe quels deux ensembles A et B sur la base de la *somme des pondérations* des options qu'ils contiennent. Précisément, l'ensemble A offrira au moins autant de liberté que l'ensemble B si, et seulement si, $\sum_{a \in A} p(a) \geq \sum_{b \in B} p(b)$. Le classement des ensembles d'opportunité obtenu dépend évidemment des pondérations numériques utilisées, qui ne sont définies qu'à une transformation linéaire près.[7] Il y a donc autant de classements d'ensembles qu'il y a de manières différentes (hormi les transformations linéaires) d'attribuer des pondérations aux options. Le critère cardinal peut évidemment être vu comme un cas particulier de cette famille de critères obtenu lorsque la même pondération numérique est attribuée à toute les options. Appelons *additifs* les critères appartenant à cette classe.

La famille des critères additifs été proposée par Klemisch-Ahlert [43] comme une généralisation du cardinal. Tous les membres de cette famille satisfont l'axiome de *Préférence du choix au non-choix* (si les poids numériques sont strictement positifs) et l'axiome d'*Indépendance.* Par contre, seul le critère cardinal satisfait l'axiome d'*Indifférence entre les situations de non-choix.*

Une question intéressante est de savoir si la réciproque à cette proposition est vraie. Peut-on caractériser la famille des critères additifs par les seuls axiomes d'*indépendance* et de *préférence du choix au non choix,* et interpréter alors l'axiome d'*indifférence par rapport aux situations de non-choix* comme

[7] Soit p, une fonction qui associe à chaque option de $\mathbb{X}$ une pondération numérique strictement positive $p(x)$ et soit q, une autre fonction de cette nature. Alors, les fonctions p et q généreront le même classement de tous les sous-ensembles non-vides de $\mathbb{X}$ s'il existe un nombre réel strictement positif α tel que, quelque soit l'option x, $p(x) = \alpha q(x)$. Des fonctions p et q qui ne peuvent pas être reliées de cette manière par un nombre α positif sont susceptibles de produire des classements différents d'ensembles.

un moyen de singulariser le critère cardinal à l'intérieur de cette classe ? L'exemple suivant, du à Kraft, Pratt et Seidenberg [46], d'un classement d'ensembles satisfaisant les axiomes 2 et 3 mais n'appartenant pas à cette classe montre que la réponse à cette question est, malheureusement, négative. L'exemple requiert l'existence d'au moins 5 options différentes (par exemple *voiture*, *vélo*, *train*, *marche à pied* et *autobus*) et implique les classements d'ensembles d'opportunité suivants :

$$\{voiture\} \text{ offre plus de liberté que } \{train, autobus\} \tag{1}$$

$$\{vélo, train\} \text{ offre plus de liberté que } \{autobus, voiture\} \tag{2}$$

$$\{autobus, marche\ à\ pied\} \text{ offre plus de liberté que } \{train, voiture\} \tag{3}$$

$$\{train, autobus, voiture\} \text{ offre plus de liberté que } \{vélo, marche\ à\ pied\} \tag{4}$$

Ces quatre jugements sont, évidemment, compatibles avec les axiomes d'*indépendance* et de *préférence du choix au non choix*. On peut, également, vérifier qu'il est possible de compléter ces jugements et de classer les autres ensembles impliquant, en partie ou en totalité, ces 5 modes de transport d'une manière qui respecte ces deux axiomes. Pourtant, les jugements libertaires (1)-(4) *ne* peuvent *pas* résulter de la comparaison d'une somme de poids numériques appliqués préalablement aux options. En effet, s'ils résultaient d'une telle comparaison, les comparaisons (1) et (2) pourraient s'écrire

$$p(voiture) > p(train) + p(autobus)$$

et

$$p(vélo) + p(train) > p(autobus) + p(voiture)$$

ce qui impliquerait, en additionnant les inégalités, que :

$$p(vélo) > 2p(autobus) \tag{5}$$

Par contre, exprimés en termes de comparaison d'une somme de poids, les comparaisons (3) et (4), impliquent, suivant le même raisonnement, que

$$2p(autobus) > p(vélo)$$

ce qui contredit l'inégalité (5).

Cet exemple montre l'importance cruciale, pour le critère cardinal, du principe d'*indifférence entre les situations de non-choix*. Si on accepte de ne pas satisfaire cet axiome, on obtient une très grande classe de classements libertaires d'ensembles d'opportunités, classe qui comprend les critères additifs mais qui ne se limite pas à eux, comme vient de le montrer l'exemple. Cet exemple montre également qu'il n'est pas simple de trouver les axiomes qui caractérisent la classe des critères additifs. D'un point de vue formel, le problème de caractérisation de la classe des critères additifs est identique à celui, considéré par les probabilistes, de comparer la vraisemblance d'évènements (des ensembles de réalisations d'une expérience aléatoire) au moyen de probabilités préalablement assignées à chacun des réalisations possibles.

L'identification des axiomes qui caractérisent l'existence d'une telle représentation probabiliste de ces comparaisons d'évènements dans le cadre fini a fait l'objet d'une intense recherche de la part des mathématiciens, initiée par de Finetti dans les années 30, et terminée par Kraft, Pratt et Seidenberg [46]. L'axiome clé qui permet la représentation probabiliste a été identifié par ces auteurs et n'a, malheureusement, aucune interprétation pour le problème, qui nous occuppe ici, de mesurer la liberté individuelle. On peut, par contre, lui trouver une telle interprétation si, comme dans Gravel, Laslier et Trannoy [36], on s'intéresse aux comparaisons d'allocations de liberté entre plusieurs individus.

La classe des critères additifs contient, nous l'avons vu, le cardinal comme cas particulier. On peut également également remarquer, à l'instar de Klemisch-Ahlert [43], que la relation d'inclusion d'ensembles peut être vue comme l'*intersection* de tous les classements d'ensembles produits par les critères additifs. Précisément, tous les critères additifs sont strictement monotones par rapport à l'inclusion et, de manière (un peu) plus suprenante, deux ensembles non reliés par l'inclusion ne seront pas classés de la même manière par tous les critères additifs.

4 Liberté et diversité

Le deuxième type de critiques qui peut être adressé au critère cardinal, ainsi du reste qu'à l'ensemble des critères additifs, est celle que Saint-Thomas d'Aquin, et Pattanaik et Xu, adressait à l'axiome d'indépendance : Celle de ne pas tenir autoriser la contribution d'une option à la liberté offerte par un ensemble à dépendre de l'ensemble en question. La possibilité de faire un déplacement en voiture verte n'a, après tout, pas le même impact sur la liberté d'un individu qui dispose déjà de la possibilité de faire le déplacement en voiture bleue que sur la liberté d'un individu qui n'a pas la possibilité de faire le déplacement en voiture. De même, il ne serait pas absurde de conclure qu'un choix électoral entre 15 candidats aux programmes très similaires offre moins de liberté qu'un choix électoral entre deux candidats aux positions plus tranchées. Tous ces exemples traduisent l'intuition suivant laquelle une définition plausible de la liberté de choix, même si elle fait abstraction des motivations qui gouvernent les choix eux même, devrait être sensible à la *diversité*, ou à la *dissimilitude* des options présentes dans l'ensemble.

4.1 Diversité et entropie

Encore faut-il comprendre comment intégrer cette notion de diversité à l'intérieur du cadre considéré ici. La discipline où la mesure de la diversité est la plus développée est la biologie. La plupart des indices de mesure de diversité développés dans cette discipline sont des généralisations du critère d'entropie de Shannon [76], dont l'emploi à la mesure de la diversité biologique a été proposé par Goode [32] et généralisé ensuite par Baczowski, Joanes et Shamia ([4], [5]) et Magurran [50] entre autres. Les indices de cette classe évaluent la diversité de n'importe quel écosystème, interprété comme un ensemble d'individus vivants appartenant à l espèces différentes, en comptant, pour chaque espèce k, $(k = 1, ..., l)$ la fraction p_k du nombre total d'individus vivants qu'elle représente et en calculant ensuite l'entropie généralisée $EG(a; l, p_1, ..., p_l)$ de l'écosystème au moyen de la formule

$$EG(a; l, p_1, ..., p_l) = \left(\sum_{k=1}^{l} p_k^a \right)^{\frac{1}{1-a}} \tag{6}$$

où a est un paramètre (positif ou nul) dont la valeur précise détermine l'indice choisi. Par exemple, le cas $a = 0$ correspond au simple dénombrement du nombre d'espèces, alors que le cas $a = 1$ correspond, à une transformation exponentielle près, à la mesure usuelle E de l'entropie de Shannon [76] définie par

$$E = - \sum_{k=1}^{l} p_k \ln p_k$$

Pourrions nous et, surtout, devrions nous utiliser de tels indices au problème de mesure de la diversité/liberté offerte par différents ensembles d'opportunités ? Une première difficulté est de savoir comment traduire, dans le contexte abstrait qui est le nôtre ici, l'interprétation donnée aux fractions p_k.

Sans proposer de justifications axiomatiques précises, des auteurs tels que Suppes [79] ou, plus récemment, Erlander [24], ont proposé de définir la liberté par l'entropie "simple" (au sens de Shannon) en proposant d'interpréter ces fractions comme *des fréquences relatives de choix* des différentes options dans les ensembles. Cette manière de faire suppose qu'il nous soit donné d'observer, pour chacun des ensembles d'opportunités auxquels peut être confronté l'individu, un certain nombre de choix effectués par ce dernier de manière répétée et de tirer de ces observations la fréquence relative avec laquelle chaque option est choisie. Elle suppose également que l'on puisse interpréter ces choix en termes de la liberté qu'ils expriment, ce qui nous renvoie au problème, non-abordé ici, de lier la liberté aux motivations qui gouvernent les choix.

Mais même si on disposait de telles observations et de leur interprétation, il n'est pas clair qu'on aurait envie d'agréger ces fréquences relatives de la manière indiquée par la formule d'entropie de Shannon, pour ne pas parler de sa généralisation par la formule (6). Le critère d'entropie valorise, toutes choses égales par ailleurs, des situations où les options sont choisies un nombre(relatif) égal de fois à celles où elles sont choisies un nombre (relatif) différent de fois. Comment justifier une telle valorisation dans le contexte d'une tentative de mesure de la liberté de choix ? Si on s'intéresse, par exemple, au choix des modes de transport, le critère d'entropie considérera comme plus libre un individu qui, lorsque faisant 100 choix consécutifs dans l'ensemble $\{voiture, \, vélo\}$, choisit 50 fois d'aller en voiture 50 fois d'aller en vélo à un individu qui, lorsque faisant le même nombre de choix dans l'ensemble $\{voiture, \, vélo, train\}$ choisit une fois sur 100 d'aller en voiture, 29 fois sur 100 d'aller en vélo et 70 fois sur 100 d'aller en train. Ce classement libertaire des deux situations paraît contestable. On aimerait au moins connaître les principes (axiomes) qui le caractériseraient dans ce contexte. Or l'identification de ces principes reste à faire.

On pourrait également interpréter les p_k de la même manière que dans la mesure entropique de la diversité biologique : Comme des fractions du nombre total d'options dans l'ensemble qui possèdent les *attributs* auxquels ces fractions correspondent. En biologie, ces attributs sont définis par le fait d'appartenir à une espèce plutôt qu'à un autre. Dans le cadre traité ici, la définition de ces attributs est loin d'être aussi naturelle. Même dans des cas "simples" comme la mesure de la liberté de choix de mode de transport, comment partitionner un ensemble tel que $\{$*voiture bleue*,*voiture rouge*, *autobus bleu*, *autobus rouge*, *vélo bleu*, *vélo rouge*, *moto bleue*, *moto rouge*, *marche à pied*$\}$ d'une manière qui soit pertinente pour l'évaluation de la diversité des modes de transports ? Par la couleur (en s'autorisant alors une catégorie sans couleur pour l'option "marche à pied") ? Par la catégorie de mode de transport sous-jacente à la dénomination (à savoir la voiture, le vélo, la moto, l'autobus et la marche à pied) ? Par la typologie, transport public-transport privé ? Ou le critère motorisé-non motorisé ? La difficultée de catégorisation devient, évidemment, abyssale lorsqu'on s'intéresse à la liberté de choix de combinaisons de quantités de divers biens et services, comme dans la théorie traditionnelle du consommateur.

Mais même en supposant que l'on parvienne, comme en biologie, à effectuer une partition pertinente des options de l'ensemble $\mathbb{X}$ en différentes catégories associées à autant d'attributs, devrions nous, pour autant, utiliser les critères généralisés d'enthropie pour évaluer la liberté/diversité de choix ? Pourquoi, après tout, vouloir mesurer la diversité biologique de la manière précise indiquée par la formule (6) ? La question est d'autant plus pertinente que les mesures d'enthropie généralisées souffrent du défaut, que les biologistes commencent à reconnaître, de n'être aucunement sensibles à la plus ou moins grande proximité qui séparent les différentes espèces vivantes. A l'évidence, une guêpe et une abeille présentent plus de *similitude* qu'un chimpanzée et un protozaire. Pourtant, n'importe quelle mesure d'entropie généralisée de la diversité considérera qu'un écosystème constitué exclusivement de guêpes et d'abeilles est aussi divers qu'un éco-système constitué exclusivement de protozoaires et de chimpanzées si, dans les deux cas, la population des individus vivant est également répartie entre les deux espèces.

4.2 La diversité comme agrégation de dissimilitudes cardinales

D'un point de vue formel, la partition des options en catégories (espèces, modes de transport, etc.) est un moyen (très) particulier de définir une notion de *proximité* entre les options. Deux options qui appartiennent à la même catégorie sont supposées "proches" et deux options relevant de catégories différentes sont supposées "éloignées". Evidemment, la notion de proximité sous-jacente à cette manière de faire est plutôt primaire : Deux options sont soit proches, soit éloignées. Elles ne peuvent pas être plus ou moins proches. C'est cette rigidité de la notion de similitude sous-jacente à l'emploi des indices d'enthropie généralisés qui, entre autres, semble limiter leur utilité comme outils de mesure de la diversité. Ne pourrait-on pas alors mesurer la diversité sur sur la base d'une conception plus fine de la similitude, ou de la proximité entre options ?

En mathématique, la notion de proximité est généralement abordée au moyen d'une *fonction de distance*, appelée parfois métrique. Dans le contexte qui est le nôtre ici, une distance est une fonction $d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R}_+$ qui associe à chaque paire d'objets de $\mathbb{X}$ un nombre (non-négatif) interprété comme la distance séparant les deux objets considérés. Pour motiver cette interprétation, on impose à d d'être symmétrique (la distance entre a et b est la même que celle entre b et a) et de satisfaire la propriété que la distance entre un objet et lui même est nulle.[8] En supposant que l'on dispose d'une telle fonction de mesure de la dissimilitude entre options, des économistes tels que Weitzman [83] (voir également [84], [85]) ont proposé des méthodes récursives d'évaluation de la diversité offerte par un ensemble fondée sur une certaine agrégation des dissimilitudes existantes entre les paires d'éléments qu'il contient.

L'idée générale de la méthode de Weitzman est la suivante. On commence par identifier, dans un ensemble d'opportunités, l'option (pas nécessairement unique d'ailleurs) qui a la plus petite *distance minimale* par rapport aux autres options. On note alors la valeur de cette plus petite distance minimale, on retire l'une des options qui en est à l'origine, et on recommence la procédure avec l'ensemble réduit restant. A la fin de la deuxième étape de cette procédure, on se retrouve, comme au terme de l'étape précédente, avec une nouvelle plus petite distance minimale (forcément au moins aussi grande que la précédente), et une nouvelle option qui lui est associée, et qu'on peut retirer de l'ensemble réduit. On peut répéter la procédure jusqu'à ce qu'on se retrouve, *in fine*, avec un seul élément dans l'ensemble, de distance évidemment nulle avec lui même. Si on excepte cette dernière distance nulle (triviale), la procédure nous laisse entre les mains une liste finie ordonnée de plus petites distances minimales, le nombre de ces distances étant inférieur de 1 au nombre d'options contenues dans l'ensemble. Weitzman [83] a proposé de comparer les ensembles sur la base de la *somme* de ces plus petites distances minimales, l'ensemble ayant la plus grande somme étant, évidemment, considéré comme "plus divers" que l'ensemble ayant la plus petite somme.

Weitzman lui même n'a jamais proposé de caractérisation axiomatique de son critère, dont il a simplement indiqué qu'il satisfaisait certaines propriétés. Ce critère paraît plausible en fournissant une définition de la diversité offerte par un ensemble comme étant la somme de certaines des distances (ou les dissimilitudes) qui séparent ses éléments. Mais la procédure de sélection des distances additionnées, par la construction sus-décrite de la liste ordonnée des plus petites distances minimales, n'est pas évidente. On aime-

[8] On impose également parfois aux distances de satisfaire $d(x, y) > 0$ si x et y sont distincts (il y a toujours une certaine distance entre deux objets distincts) ainsi que l'inégalité dite "triangulaire" suivant laquelle $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ (principe d'Euclide suivant lequel la distance d'un "trajet" direct entre deux objets n'est jamais plus grande que celle d'un trajet "indirect"). Cette dernière propriété n'a pas de raison particulière d'être imposée ici. On peut, de fait, très bien admettre que la dissimilitude, en tant que mode de transport, entre le vélo et la voiture soit plus grande que la somme des dissimilitudes entre la voiture et la moto et entre la moto et le vélo.

rait donc apprécier d'avantage cette plausibilité en connaissant les axiomes qui justifient cette manière de faire, et seulement celle-là.

Bossert, Pattanaik et Xu [13] ont identifié trois axiomes qui caractérisent la procédure de Weitzman si l'ensemble $\mathbb{X}$ est suffisamment riche. Les axiomes qu'ils utilisent sont les suivants :

Axiome 4 *(Monotonie par rapport à la dissimilitude) pour n'importe quelles options w, x, y et z dans $\mathbb{X}$, $\{w,z\} \succeq \{x,y\}$ si et seulement si $d(w,z) \geq d(x,y)$*

Axiome 5 *(Indépendance restreinte) Pour n'importe quels ensembles A et B, et pour n'importe quelles options x et y (x n'appartenant pas à A et y n'appartenant pas à B), si la distance séparant x de l'élément qui lui est le plus proche dans A est, faiblement, plus petite que la plus petite distance séparant deux éléments de A, si il en va de même pour y par rapport à B et si, finalement, les distances séparant x et y de l'élément qui leur est le plus proche dans A et dans B respectivement sont les mêmes, alors $A \succeq B$ si et seulement si $A \cup \{x\} \succeq B \cup \{y\}$.*

Axiome 6 *(Indifférence au lien) Pour n'importe quelles options a, b , c, x et y dans $\mathbb{X}$, si $d(x,y) > d(a,b) \geq \max(d(a,c), d(b,c))$ et $d(x,y) = d(a,b) + \min(d(a,c), d(b,c))$, alors $\{x,y\} \sim \{a,b,c\}$.*

Si l'on fait exception de l'axiome 4, qui constitue l'expression la plus pure du principe suivant lequel la diversité d'un ensemble est une agrégation des dissimilitudes, mesurées par la distance, entre les paires d'éléments qu'il contient, on ne peut pas dire de ces axiomes qu'ils soient particulièrement transparents.

L'axiome d'*indépendance restreinte* traduit l'idée suivant laquelle des ajouts ou des retraits d'options augmentant la proximité maximale dans les ensembles où ils sont ajoutés ou soustraits, et l'augmentant exactement de la même manière, n'affectent pas le classement de ces ensembles. Remarquons la modification substantielle du principe d'indépendance simple utilisé pour la caractérisation du critère cardinal que cet axiome représente. Dans l'axiome d'indépendance simple, c'est l'ajout (ou le retrait) de la même option qui laisse inchangé le classement des ensembles. Dans l'axiome d'indépendance restreinte utilisé ici, la préservation du classement d'ensembles n'est garantie que lorsque l'ajout des options (qui n'ont même pas à être les mêmes d'un ensemble à l'autre) augmente de la même manière la proximité maximale entre les options des ensembles.

L'axiome d'*indifférence au lien* est le plus opaque et, certainement, le moins acceptable. Il requiert que lorsque la dissimilitude entre deux options x et y est légèrement plus grande que celle séparant les options a et b (au sens où la *différence de dissimilitude* entre x et y et a et b n'excède pas la dissimilitude entre a et b), l'ensemble formé des seules options x et y doit être considéré équivalent à l'ensemble formé des options a et b d'une part, et d'une option c d'autre part, lorsque les nouvelles dissimilitudes générées par l'ajoût de c à a et à b est inférieur à la dissimilitude entre a et b, et lorsque la plus grande proximité ajoutée par c à a et b est égale à la différence de dissimilitude entre a et b et x et y. Dans ce type de situations, l'option c est appelée par Weitzman [83] un *lien* entre la paire a et b et la paire x et y. On peut, en effet, dire de c qu'elle relie la distance entre a et b à celle, plus grande, entre x et y d'une manière assez minimale puisque

1) son ajout à $\{a,b\}$ crée des distances (par rapport à a et b) plus faibles que celle séparant déjà a et b et

2) la plus petite des distances qu'il crée permet tout juste de combler la différence de distance entre x et y et a et b.

Il est, par contre, loin d'être clair que cette manière très particulière de "lier" les paires $\{a, b\}$ et $\{x, y\}$ soit porteuse d'une signification susceptible de justifier notre adhésion au principe, sous-jacent à cet axiome, suivant lequel les ensembles $\{a, b, c\}$ et $\{x, y\}$ doivent être jugés équivalents. Supposons que la distance entre un vélo (a) et une motocyclette (b) soit de 6, que celle entre entre la marche à pied (x) et la voiture (y) soit de 10. Si la distance entre une trottinette (c) et le vélo est de 4, et celle entre la trottinette et la moto et de 6, pourquoi diable devrait-on conclure de ces informations que l'ensemble $\{$*vélo*,*moto*,*trottinette*$\}$ offre exactement la même diversité de moyen de transports que l'ensemble $\{$*marche à pied*, *voiture*$\}$?

Bossert, Pattanaik et Xu ([13] ; théorème 4.3) ont montré que le critère de Weitzman est le seul classement réflexif, transitif et complet de tous les sous-ensembles finis et non-vides qui satisfait les axiomes 4 à 6. La démonstration de leur théorème requiert, en outre, de l'ensemble $\mathbb{X}$ qu'il contienne suffisamment d'options pour pouvoir générer n'importe quel nombre positif réel comme distance entre au moins deux de ses éléments. Cette hypothèse exclut évidemment que $\mathbb{X}$ contienne un nombre fini d'options.

L'opacité relative de ces axiomes jette donc, pour le moment, un doute sur l'intérêt normatif de la procédure de Weitzman comme critère de mesure de la diversité, ou de la liberté, offerte par différents ensembles. Nous n'avons pas, à l'heure actuelle, de raisons particulières de mesurer la diversité de la manière, assez complexe, proposée par Weitzman.

4.3 La diversité comme agrégation de dissimilitudes ordinales

L'approche de Weitzman soulève, en outre, une difficultée interprétative qui est, me semble t-il, encore plus fondamentale. Elle suppose l'existence d'une fonction de distance *mesurant* les dissimilitudes existantes entre les différentes options de *manière cardinale*. En clair, l'approche de Weitzman requiert de la part du modélisateur de la diversité une capacité *a priori* à formuler des énoncés de type : "*la dissimilitude entre la marche à pied et la voiture est trois fois plus grande que celle entre le vélo et la motocyclette*". Or il n'est pas évident que cette capacité existe, même chez le modélisateur travaillant dans le contexte très développé de la mesure de la diversité biologique. De fait, s'il paraît raisonnable de penser que beaucoup de biologistes se rejoindront sur le constat qu'une abeille et une guêpe présentent plus de similitude qu'un chimpanzée et un protozoaire, il l'est beaucoup moins de croire qu'ils s'accorderont à dire que le chimpanzée et le protozoaire sont dix fois plus dissimilaires que l'abeille et la guêpe. Ne pourrait-on pas définir, à la manière de Weitzman, la diversité d'un ensemble comme une synthèse des dissimilitudes entre les éléments qu'il contient sans, toutefois, aller jusqu'à exiger une capacité cardinale de mesure de la dissimilitude ?

L'alternative la plus naturelle à une mesure cardinale de la dissimilitude est, évidemment, une *mesure ordinale* qui permet de formuler des énoncés de type" a et b sont plus dissimilaires que c et d" mais qui ne fournit aucune information susceptible de quantifier d'avantage ces énoncés. En particulier donc, une conception ordinale de la dissimilitude ne permet pas de dire des choses comme "a et b sont deux fois plus dissimilaires que c et d". Une notion de dissimilitude ordinale qui vient à l'esprit est celle, implicitement sous-jacente à l'emploi des critères généralisés d'entropie en biologie, qui considère deux objets comme étant soit similaires, soit dissimilaires, sans autre possibilité de discrimination intermédiaire. Appelons *dichotomique* une telle conception de la dissimilitude.

Sur la base d'une telle conception dichotomique de la dissimilitude, Pattanaik et Xu [58] (voir également la discussion dans Bossert, Pattanaik et Xu [14]) ont formulé une caractérisation axiomatique, que nous ne détaillerons pas ici, d'un critère particulier de comparaison d'ensembles d'opportunités. D'après leur critère, la diversité d'un ensemble est mesurée par le *nombre d'éléments* que contient la plus petite partition possible de l'ensemble en éléments similaires. Appliqué à la mesure à la mesure de la diversité biologique, et en supposant que la conception dichotomique de la dissimilitude sous-jacente soit celle consistant à considérer deux individus vivants comme similaires si et seulement si ils appartiennent à la même espèce, le critère de Pattanaik et Xu revient à compter le nombre d'espèces représentées dans chaque ensemble. Il s'agit certainement d'un critère frustre qui, contrairement à d'autres membres de la famille de critères généralisés d'enthropie couverts par la formule (6), n'est pas sensible aux nombres relatifs de représentants contenus dans chaque espèce. Mais ce critère a au moins le mérite d'avoir été caractérisé axiomatiquement à l'intérieur d'une approche qui reconnaît explicitement le caractère dichotomique de la notion de proximité entre individus vivants sous-jacents à leur regroupement entre différentes espèces. Il serait, certes, d'un intérêt appréciable de pouvoir disposer d'une justification aussi précise d'autres membres de la famille des critères décrits par l'équation (6).

Evidemment, à l'instar de tous les critères généralisés d'entropie, celui caractérisé par Pattanaik et Xu n'est aucunement sensible aux plus ou moins grandes différences qui peuvent séparer des individus appartenant à des espèces différentes (guêpe vs abeille par rapport à chimpanzée vs protozoaire). Pour autoriser une telle sensibilité, il convient de ne pas se limiter à une conception dichotomique de la dissimilitude et d'envisager, de manière plus générale, que la dissimilitude soit appréhendée au moyen d'une relation quadernaire Q plus générale définie sur $\mathbb{X}$.[9] Ainsi, écrire $(w,\ z)\ Q\ (x,\ y)$ s'interprétera comme voulant dire "la dissimilitude entre w et z est au moins aussi grande que celle entre x et y". De manière analogue, on note les énoncés "la dissimilitude entre w et z est *strictement plus grande* que celle entre x et y" et "la dissimilitude entre w et z est la même que celle entre x et y" par

[9] Par analogie avec une relation *binaire* qui implique la comparaison un à un de *deux* éléments un à un, une relation *quadernaire* compare des paires d'éléments une à une, et implique donc des comparaisons de *quatre* éléments à la fois.

$(w,\ z)\ Q_A\ (x,\ y)$ et $(w,\ z)\ Q_S\ (x,\ y)$ respectivement.[10] Pour justifier l'interprétation donnée à Q d'être une mesure ordinale de la distance, on suppose qu'elle est réflexive, transitive, complète et symmétrique et qu'elle considère comme identiquement dissimilaires (ou similaires) toutes les paires constituées d'une duplication de la même option. On supposera en outre, d'une manière qui n'est pas toujours satisfaite par la distance numérique, que la dissimilitude entre deux options distincte x et y est strictement plus grande que la dissimilitude entre x (ou y) et elle-même. Après tout, si deux options x et y sont considérées distinctes pour les fins de l'analyse, ne devraient-elles pas être considérées comme ayant une certaine dissimilitude ?

Une relation Q possédant ces propriétés peut être représentée par une fonction numérique de distance comme celles évoquées dans la sous-section précédente. Réciproquement, et à l'exception possible de la dernière propriété dans le cas de certaines distances, toute fonction de distance induit un classement des paires d'options qui prend la forme d'une relation quadernaire satisfaisant ces propriétés. Mais la seule donnée d'une relation quadernaire Q transmet beaucoup moins d'information sur la mesure de la dissimilitude entre les options que ne le fait la donnée d'une distance numérique. Comme dans le cas de la mesure des préférences par une fonction d'utilité, il y a *plusieurs* mesures différentes de distance qui représentent une *même* relation quadernaire Q (toutes ces mesures étant obtenues l'une de l'autre au moyen d'une transformation monotone croissantes). Peut-on mesurer la diversité offerte par différents ensembles d'options en n'utilisant sur la dissimilitude des objets que l'information ordinale transmise par Q ?

Voici certains axiomes qu'ont proposé Bervoets et Gravel [9] pour effectuer cette mesure.

Axiome 7 *(Monotonie ordinale par rapport à la dissimilitude) Pour toutes options* $w, x,\ y$ *et* z *dans* $\mathbb{X}$, $(w,\ z)\ Q\ (x,\ y) \Longleftrightarrow \{w,\ z\} \succeq \{x,\ y\}$.

Axiome 8 *(Monotonie faible par rapport à l'inclusion) Pour tous les ensembles d'opportunités* A *et* B, *si* $A \supseteq B$ *alors* $A \succeq B$.

Axiome 9 *(Robustesse par rapport à l'ajoût d'ensembles dominés) Pour tous les ensembles d'opportunités* A, B, C *et* D *satisfaisant* $B \cap C = B \cap D = C \cap D = \emptyset$, *si* $A \succeq B \cup C$, $A \succeq B \cup D$ *et* $A \succeq C \cup D$, *alors* $A \succeq B \cup C \cup D$ *et si* $A \succ (B \cup C)$, $A \succ (B \cup D)$ *et* $A \succ (C \cup D))$ *alors* $A \succ (B \cup C \cup D)$.

L'axiome de *Monotonie ordinale par rapport à la dissimilitude* est la traduction ordinale de l'axiome utilisé par Bossert, Pattanaik et Xu [13] dans leur caractérisation axiomatique de la procédure de Weitzman. Il est difficile d'imaginer comment un classement d'ensembles qui soit sensible à la dissimilitude de ses options sur la base d'une notion de dissimilitude a priori pourrait ne pas satisfaire un tel axiome. Notons avec soin que l'énoncé formel de cet axiome ne requiert pas des options w, x, y et z qu'elle soient distinctes.[11] Pour cette raison, lorsque employé avec une relation quader-

[10] Techniquement, Q_A et Q_S sont les facteurs *A*symmétriques (classement strict) et *S*ymmétrique (équivalence) de Q.

[11] Pour cette raison, l'axiome est formulé avec un léger abus de notation puisque, dans le cas où $x = y$, l'ensemble $\{x, y\}$ sera, en fait, le singleton $\{x\}$ (ou $\{y\}$).

naire qui considère que deux options distinctes sont plus dissimilaires qu'une des deux options et elle même, l'axiome de *monotonie ordinale par rapport à la dissimilitude* implique les axiomes d'*Indifférence entre des situations de choix* et de *Préférences du choix au non-choix* de Pattanaik et Xu [56].

L'axiome de *Monotonie faible par rapport à l'inclusion* se passe évidemment de commentaires, même si, on doit le noter, il est violé par le critère de l'entropie simple employé à la mesure de la diversité biologique.[12]

L'axiome de *Robustesse par rapport à l'ajoût d'ensembles dominés* est, certes, plus discutable que les deux précédents. Comme son nom l'indique, il traduit le principe suivant lequel la domination d'un ensemble par un autre en termes de diversité devrait être robuste à l'ajout, à l'ensemble dominé, d'options lorsque la diversité offerte par ces options reste plus faible que celle de l'ensemble dominant. Pour illustrer sa signification, imaginons qu'un ensemble A ait été considéré comme offrant plus (faiblement ou strictement) de diversité ou de liberté que B. On peut, pour reprendre notre exemple familier, penser que A soit l'ensemble des modes de transport {*voiture*, *marche à pied*, *vélo*,*train*} et que l'ensemble B soit constitué des modes de transport {*moto*, *trottinette*}. Imaginons qu'on ajoute successivement B, d'abord les options contenues dans $C = \{autobus, tramway\}$ puis l'option contenue dans le singleton $D = \{patin\ à\ roulettes\}$. Si l'on considère que la supériorité de A en termes de diversité n'est par renversée par chacun de ces ajoûts pris isolément, et si en outre on considère que la diversité offerte par A est supérieure à la diversité offerte par les options contenues dans C et dans D, l'axiome de *Robustesse par rapport à l'ajout d'ensembles dominés* exigera que soit préservé la suprématie de l'ensemble {*voiture*, *marche à pied*, *vélo*, *train*} sur l'ensemble {*autobus*, *moto*, *patin à roulettes*, *tramway*, *trottinette*}.

Un classement d'ensembles qui vérifie ces trois axiomes est le critère *maxi max* qui compare les ensembles sur la base de la dissimilitude relative de leurs deux éléments les plus dissimilaires. Pour illustrer, supposons que $\mathbb{X} = \{train, voiture, vélo, marche\ à\ pied\}$ et que la notion sous-jacente de dissimilitude entre modes de transports stipule que (*train*,*marche à pied*) Q_A (*voiture*, *marche à pied*) Q_A (*train*,*vélo*) Q_A (*voiture*,*vélo*) Q_A (*train*, *voiture*) Q_A (*vélo*,*marche à pied*). Dans un tel contexte, le critère maxi-max considérera que la diversité maximale que peut offrir un ensemble est celle offerte par l'ensemble {*train*, *marche à pied*} comprenant les deux éléments les plus dissimilaires de $\mathbb{X}$. En particulier donc, l'ensemble {*train*, *marche à pied*} sera considéré comme offrant autant de diversité que l'ensemble {*train*, *voiture*, *vélo*, *marche à pied*}. On peut, évidemment, trouver que cette “dictature” exercée par la paire formée des éléments les plus dissimilaires dans les ensembles sur le classements de ceux-ci est un peu extrême.A t-on d'autre choix que le maxi-max comme critère de classements des ensembles qui satisfait les axiomes 7-9 ? La réponse à cette question est, malheureusement, négative. Bervoets et Gravel [9] ont, en effet, démontré que le critère maxi max est le seul classement réflexif et transitif d'ensembles d'opportunités qui satisfait les axiomes 7 à 9.

[12] Par exemple, dans un écosystème où tous les individus vivants sont également répartis entre les différentes espèces, l'ajoût d'un individu dans l'une des espèces va y réduire l'entropie.

Une faiblesse du critère maxi-max est d'*ignorer totalement* la contribution, à la diversité d'un ensemble, des paires d'options ne présentant pas une dissimilitude maximale. Un moyen assez naturel d'assouplir cette hypothèse est d'envisager un *prolongement lexicographique* du critère maxi-max. En comparant deux ensembles, ce critère, que j'appellerai *lexi-max*, regarderait d'abord les paires d'éléments les plus dissimilaires et, en cas d'un classement strict de ces paires, classerait les ensembles exactement de la même manière que le critère maxi-max. Toutefois, et contrairement au critère maxi-max, en cas de dissimilitude égale entre les paires d'éléments les plus dissimilaires, le critère lexi max passerait aux paires d'éléments venant au deuxième rang dans l'ordre de dissimilitude et, en cas de dissimilitude égale là aussi, passerait aux troisièmes paires, et ainsi de suite si besoin est. Le critère lexi-max a également fait l'objet d'une caractérisation axiomatique, que nous ne présenterons pas ici, par Bervoets et Gravel [9]. Du fait de la propriété, imposée à la relation quadernaire de dissimilitude, de considérer deux éléments distincts comme étant plus dissimilaires qu'un des deux éléments et lui même, le critère lexi max considérera toujours qu'un ensemble est plus divers que n'importe lequel de ses sous-ensembles. En particulier donc, dans l'exemple ci-dessous, le critère lexi-max considérera que la diversité offerte par $\{$*train*, *voiture*, *vélo*, *marche à pied*$\}$ est strictement plus grande que celle offerte $\{$*train*, *marche à pied*$\}$.

Si le gain de sensibilité aux options les plus similaires que permet le lexi-max par rapport au maxi-max n'est pas nul, il reste faible. De fait, on peut dire des deux critères qu'ils donnent un "droit de veto" aux deux options les plus dissimilaires des ensembles dans le classement de ceux-ci. Ce droit de véto paraît un peu fort. Ne pourrait-on pas autoriser des arbitrages moins abrupts entre les contribution des paires d'éléments les plus dissimilaires et celles des paires d'éléments les plus similaires à la mesure de la diversité, en autorisant la possibilité que la présence d'un grand nombre d'éléments assez similaires puissent présenter, parfois, plus de diversité qu'un petit nombre d'options très dissimilaire ? On aimerait pouvoir donner une réponse affirmative à cette question, tout en reconnaissant que la formulation des propriétés que devrait satisfaire une agrégation plus "douce" des dissimilitudes dans le contexte ordinal où ces dernières sont définies n'est pas facile.

4.4 La diversité comme valeur des attributs réalisés

Nehring et Puppe [53] ont développé une approche quelque peu différente du problème de mesure de la diversité. L'approche de Nehring et Puppe suppose des options qu'elles ont été catégorisées en un certain nombre d'attributs : Etre une voiture, être un véhicule à moteur, être un véhicule à deux roues, exiger un effort physique significatif de la part de l'individu, etc. Chaque attribut est, naturellement, identifié par un sous ensemble de $\mathbb{X}$ contenant toutes les options possédant l'attribut considéré et seulement celles-là. La catégorisation des options en attributs génère donc une famille, disons $\mathbb{A}$, de sous ensembles de $\mathbb{X}$. Les exemples considérés précédemment de partitions des individus vivants en espèces ou, dans l'approche de Pattanaik et Xu [58], en groupes d'options similaires entre elle sont des cas très particuliers de ce type de familles. Mais l'approche de Nehring et Puppe peut s'appliquer à des procédures beaucoup plus sophistiquées de catégorisation des options que la simple partition. Une procédure extrême, et sans doute peu intéressante, serait de supposer que n'importe quel ensemble d'options correspond à un attribut. Cette procédure correspondrait au truisme banal suivant lequel n'importe quel groupe d'objets possède la propriété...d'être constitué d'objets appartenant à ce groupe. L'autre extrême serait de considérer que la famille $\mathbb{A}$ est constituée de tous les singletons (chaque option est un attribut).

Supposons que l'on puisse donner à chaque attribut A de $\mathbb{A}$ une valeur numérique $v(A)$ positive ou nulle s'interprétant comme l'importance, pour l'individu, de pouvoir disposer d'une option possédant l'attribut correspondant.[13] Nehring et Puppe proposent de mesurer la diversité offerte par un ensemble comme étant la *somme* des *valeurs des attributs* possédés par les options que cet ensemble contient. Formellement, si B est un ensemble d'opportunités quelconque, sa diversité $\delta(B)$ sera mesurée par la formule

$$\delta(B) = \sum_{\{A \in \mathbb{A} : A \cap B \neq \emptyset\}} v(A) \tag{7}$$

Remarquons que cette formule stipule que la valeur d'un attribut n'apparaît qu'une fois dans chaque ensemble. Il n'importe donc aucunement, pour la diversité, qu'il y ait une ou plusieurs options dans l'ensemble qui possèdent l'attribut en question. Si l'on utilise comme famille d'attributs la classe de tous les singletons (chaque option est un attribut), la formule (7) ne définit rien d'autre qu'un classement d'ensembles appartenant à la classe des critères additifs discutés en section 3.3. Si, par contre, on applique cette formule à la famille $\mathbb{A}$ correspondant à la partition des individus vivants en espèces, on obtient alors une généralisation du critère sus-mentionné du nombre d'espèces qui, à la différence de ce dernier, peut reconnaître aux différentes espèces une contribution différente à la diversité.

Nehring et Puppe font la remarque qu'une mesure de la diversité au moyen de la formule (7) peut donner lieu à l'établissement d'une “pseudo-distance” entre les options de la manière suivante. Pour toute paire d'options x et y, on définit la (pseudo) distance $d(x, y)$ séparant x de y par la formule

$$d(x, y) = \delta(\{x, y\}) - \delta(\{y\}) \tag{8}$$

En mots, la (pseudo) distance séparant x de y est définie par l'augmentation de diversité que permet l'ajout de x à y. On parle de *pseudo distance* car, contrairement à la distance discutée en section 4.2, la fonction définie par (8) n'est pas nécessairement symétrique (l'ajout de x à y n'a pas nécessairement le même impact sur la diversité que l'ajout de y à x). On peut, par contre, montrer que la pseudo-distance définie par l'expression (8) satisfait

[13] On peut, d'un point de vue formel, voir v comme une fonction ayant pour domaine l'ensemble de tous les sous-ensembles non vides de $\mathbb{X}$ en utilisant comme convention que si un ensemble B d'options ne correspond pas à un attribut, alors $v(B) = 0$. Pour cette raison, on peut sans perte de généralités supposer de v qu'elle assigne des poids numériques strictement positifs à tous les attributs.

l'inégalité triangulaire mentionnée à la note 7. Remarquons au passage que cette manière de définir la pseudo distance à partir de la mesure de la diversité définie par (7), qui retient l'attention de Nehring et Puppe n'est pas la seule possible. On pourrait également définir une distance (et pas seulement une pseudo distance) d' au moyen de la formule

$$d'(x,y) = \frac{d(x,y) + d(y,x)}{2} \tag{9}$$

Cette formule définit la distance entre x et y comme la moyenne arithmétique de l'augmentation de diversité que permet l'ajout de x à y et de celle que permet l'ajout de y à x.

Si l'approche proposée par Nehring et Puppe pour évaluer la diversité génère une distance sur l'ensemble des options, et permet donc de définir une notion de proximité entre celles-ci qui entre dans l'évaluation de la diversité, on ne peut pas dire pour autant qu'elle définit la diversité d'un ensemble comme une agrégation des dissimilitudes entre les paires d'éléments qu'il contient. En général, la mesure de diversité produite par la formule (7) utilise plus d'information sur les contributions des options à la diversité que celle, sous-jacente aux distances définies par les formules (8) et (9), qui se limite aux paires et les singletons. Spécifiquement, et pour certaines manières de définir et de valoriser les attributs, on peut concevoir deux ensembles dont les distances, telles que mesurées par (8) et (9), entre chaque paires d'option sont les mêmes et qui, pourtant, ne se verront pas affecter la même valeur de diversité. Dans leur article (voir leur théorème 4.1), les auteurs identifient la propriété que doit satisfaire la famille $\mathbb{A}$ des attributs pour que n'importe quelle mesure de diversité construite sur la base de la formule (7) puisse s'interpréter comme une agrégation des dissimilitudes mesurées par (8).

L'approche de Nehring et Puppe, parce qu'elle ne réduit pas la diversité d'un ensemble à une agrégation des dissimilitudes entre les paires d'options qu'il contient, apparaît donc substantiellement différente des approches précédentes. La question qu'il convient de se poser est de savoir si cette différence constitue un atout qui plaide en sa faveur. Au moins trois limitations semblent, pour le moment, conduire à répondre par la négative à cette question.

La première tient à la difficulté, déjà évoquée en section 4.3, qu'il peut y avoir à effectuer une catégorisation pertinente des options en termes d'attributs et, *a fortiori*, à trouver une pondération adéquate de ces derniers pour les fins de la formule (7). Doit on pondérer le fait d'être une voiture différemment du fait d'être un train ? Quelle importance relative doit avoir l'attribut d'être un mode de transport motorisé par rapport à celui d'être un mode de transport non motorisé ? Il semble, à cet égard, plus facile de s'entendre sur les dissimilitudes existantes entre les différents modes de transport (une voiture bleue est plus proche d'une voiture rouge qu'elle ne l'est d'un vélo rouge, un vélo rouge est plus proche d'une trottinette qu'il ne l'est d'un train bleu, etc.) que sur des regroupements des options en attributs et sur une pondération de ceux-ci.

Une seconde limitation concerne la formule particulière (7) de mesure de la diversité proposée par Nehring et Puppe. Même si on parvenait à catégoriser les options en attributs, et à pondérer la contribution de ceux-ci à la diversité, il n'est pas clair qu'on aurait envie de le faire de la manière précise décrite par (7). La formule (7) présente deux caractéristiques qui méritent plus amples justifications.

La première est de considérer que chaque attribut contribue à la diversité d'un ensemble d'une manière qui ne dépend pas de la présence, dans l'ensemble, d'autres attributs. On pourrait, pourtant, admettre que certains attributs sont plus proches entre eux que d'autres, et donc que la contribution d'un attribut à la diversité d'un ensemble dépend de la présence, dans l'ensemble, d'attributs plus ou moins proche. Par exemple, si le fait d'être une voiture est un attribut, et le fait d'être un train et un vélo en sont deux autres, on pourrait admettre qu'il y ait une plus grande proximité entre le train et la voiture qu'entre le train et le vélo. Dans ce cas, il ne serait pas absurde de penser que la contribution à la diversité d'ajouter le train comme mode de transport à un ensemble de voitures pourrait être plus faible que le gain de diversité d'ajouter le même train un ensemble de vélos. Nehring et Puppe rétorqueraient certainement à cet argument que la proximité plus grande du train par rapport à la voiture que par rapport au vélo supposée dans cet exemple résulte d'un travail incomplet de catégorisation des options en attribut. Si on considère qu'un train et une voiture sont plus similaires qu'un train et un vélo, c'est sans doute parce qu'on pense qu'ils possèdent ensemble un attribut (par exemple le fait d'être tous deux des moyens de transport à moteur) que ne possède pas le vélo. Il faut, dans ce cas intégrer, cet attribut à l'analyse et le pondérer. Ce n'est que lorsque tous les attributs pertinents ont été identifiés et pondérés qu'on peut appliquer la formule (7). Si l'on dispose de tous les attributs pertinents, il paraît raisonnable de penser que chacun aura une pondération (une importance) qui ne dépend pas de la présence ou non des autres attributs. C'est possible. Mais on aimerait en être convaincu par des arguments axiomatiques.

La seconde caractéristique de la formule (7) a déja été évoquée. Elle concerne le fait que le nombre d'options possédant un attribut particulier n'affecte pas la diversité d'un ensemble. On peut, ici aussi , trouver surprenante cette propriété. Même dans le cas d'un travail complet de regroupement des options en différents attributs, ne pourrait-on pas envisager que la diversité soit sensible à la multiplication du nombre d'options présentant un attribut particulier ? On peut, ici aussi, répondre à cette objection en acceptant d'inclure, dans la famille des attributs, tous les singletons (chaque option est un attribut, ce qui ne l'empêche pas d'avoir d'autres attributs qui seront également valorisés). Mais on risque alors d'avoir une structure d'attributs extrêmement complexe (une voiture bleue a l'attribut d'être une voiture bleue, d'être une voiture, d'être un véhicule à moteur, etc.).

La troisième difficulté que pose l'approche de Nehring et Puppe réside dans le caractère cardinal de l'information sur la pondération des attributs fournie par la fonction v de la formule (7). Si l'on peut à la rigueur imaginer de s'entendre sur un classement des attributs pertinents en termes de leur contribution possible à la diversité, il paraît difficile de s'entendre sur une mesure numérique précise (à une transformation linéaire près) de la valeur d'un attribut. Or une telle mesure numérique est requise par l'opération de sommation de la formule (7).

Pour répondre à cette dernière objection, ainsi, indirectement, qu'aux autres, Nehring et Puppe ont proposé une caractérisation axiomatique assez "exotique" du classement des ensembles fourni par la comparaison des valeurs de la formule (7). Interprétée dans le contexte qui est le nôtre ici, de mesure de la liberté individuelle, leur caractérisation axiomatique suppose de l'individu qu'il envisage, peut être derrière un *voile de l'ignorance*, d'être confronté à différents ensembles d'opportunités avec différentes probabilités. Comme en théorie de la décision, nous appellerons lotterie une distribution particulière de probabilités qui associe à chaque ensemble d'opportunités la probabilité particulière que l'individu y soit confronté. Evidemment, un ensemble d'opportunités particulier peut s'interpréter comme une lotterie dégénérée qui attribue à cet ensemble une probabilité de 1 et aux autres une probabilité 0. La caractérisation de Nehring et Puppe suppose de l'individu qu'il soit capable, derrière son voile de l'ignorance, de classer les différentes distributions de probabilités d'être confronté à tel ou tel ensemble d'opportunités. Si les préférences de l'individu pour ces lotteries très particulière satisfont les axiomes traditionnels de Von Neumann Morgenstern, et si elle satisfont en outre la propriété que l'individu préfère les lotteries qui, quelque soit l'attribut, lui donne une plus grande probabilité de réalisation, les auteurs démontrent que ces préferences peuvent être représentées comme une espérance mathématique d'utilité positive. Le reste de la justification des auteurs consiste à interpréter cette utilité positive comme une mesure de la diversité de l'ensemble d'opportunités auquel elle est affecté, et de l'exprimer en terme de la formule (7) par une inversion conjuguée de Moebius dont le principe est détaillé dans Nehring [51].

La pertinence du recours à une situation artificielle d'incertitude sur l'ensemble d'opportunités auxquel sera confronté l'individu pour justifier le classement que l'on peut faire de ces ensembles reste à établir. Si le problème consiste à comparer ces ensembles sur le plan de la liberté qu'ils offrent, pourquoi ce classement devrait-il résulter de celui que ferait un individu des distributions de probabilité sur les différents ensembles d'opportunités auxquels il pourrait être confronté ? Remarquons, en outre, que le fait de pouvoir représenter un classement de lotteries résultant d'une comparaison d'espérance mathématique d'utilités ne donne aucune légitimité particulière à cette espérance mathématique. En particulier, on pourrait tout aussi bien utiliser le carré de l'espérance mathématique d'utilité, ou son logarithme, ou toute autre transformation monotone croissante pour effectuer ces comparaisons de lotteries. Ces autres représentations numériques ne permettraient pas de déboucher, au moyen d'une inversion conjuguée de Moebius, sur la formule (7). On ne peut donc pas dire que Nehring et Puppe ont, véritablement, justifié la mesure de la diversité qu'ils proposent.

5 Conclusion : Peut on définir la liberté indépendamment de ses bienfaits ?

Que conclure des efforts, synthétisés dans ce chapitre, de définir et mesurer la liberté et la diversité des choix disponibles à un individu sans faire référence aux motivations susceptibles d'expliquer ces choix ?

Si l'on accepte de considérer des définitions de la liberté qui satisfont l'axiome d'indépendance, et qui n'accordent pour cette raison aucune importance à la diversité des options présentes, les possibilités de définir la liberté par des principes intelligibles paraissent fort limitées. Mise à part la relation d'inclusion d'ensembles qui traduit une intuition spontanée de ce qu'est la liberté, ces possibilités se résument, en effet, au critère cardinal, éventuellement généralisée à la famille des critères additifs si on accepte la caractérisation de cette famille proposée, dans un contexte de mesure sociale de la liberté, par Gravel, Laslier et Trannoy [35].

La prise en compte de la diversité dans la définition de la liberté ouvre d'avantage de possibilités, ne fut-ce que parce que la manière même avec laquelle la diversité doit être appréhendée pose de délicats problèmes. J'ai, dans cette synthèse, opposé quatre grands types d'approches à la mesure de la diversité :

1) l'approche, inspirée de la biologie, qui assimile la diversité à une généralisation de la notion d'entropie,

2) l'approche qui définit la diversité comme une agrégation de dissimilitudes mesurées de manière cardinale,

3) sa cousine qui définit la diversité comme une agrégation de dissimilitudes mesurées de manière ordinale et

4) l'approche de Nehring et Puppe qui définit la diversité comme la valeur d'attributs réalisés.

Compte tenu de l'état actuel des justifications de ces approches dans la littérature, j'ai donné une préférence faible à l'approche 3), en évoquant notamment, le fait qu'il semblait plus simple, dans le contexte d'une appréciation de la diversité, de s'entendre sur une notion ordinale de la dissimilitude entre les options que sur une notion cardinale ou que sur une pondération numérique des attributs que les options peuvent avoir.

Il demeure que les définitions de la diversité dont nous disposons actuellement dans le cadre de l'approche 3), issues des contributions de Pattanaik et Xu [58] et Bervoets et Gravel [9] sont plutôt rudimentaires, et appellent des recherches futures.

Ces recherches devraient elles être poursuivies dans le cadre, considéré ici, où la liberté et la diversité de choix sont appréciées sans référence explicite aux motivations qui gouvernent les choix, à ce que les économistes appellent les préférences des agents ? Un certain nombre d'économistes, dont Arrow [3], Foster ([27], [28]), Kreps [49], Nehring et Puppe [52], Pattanaik et Xu [57], Puppe [63], Romero-Medina [67], Sen [73] Sugden [77], seraient très probablement enclins à répondre négativement à cette question, et à affirmer, de manière souvent péremptoires, que toute définition plausible de la liberté doit faire explicitement référence à un ensemble de préférences que sont susceptibles d'utiliser les agents lorsqu'ils seront amenés à choisir dans l'ensemble. Je suis, pour ma part, moins ferme sur cette question. Si l'indétermination d'un agent par rapport au préférences qu'il utilisera pour faire un choix est une explication très valable de la préoccuppation libertaire, est-elle la seule ? Il paraît, après tout, difficile de n'expliquer "l'attachement à la liberté du coeur de certains hommes" de Toqueville, ou l'amour de la liberté manifestée par le loup de la fable de La Fontaine que par un goût très fort pour l'indétermination par rapport à un ensembles de préférences. Ne peut-on pas penser que la liberté puisse être un *objet des préférences*, au même titre que le poisson ou les épinards, et susceptible, comme ces derniers, d'être valorisée différemment par différents individus ? Après tout, certains individus peuvent aiment plus que d'autres la liberté, le plaisir de faire un choix autonome dans un un vaste menu et de disposer d'un grand éventail de possibilités. Si la liberté peut être un *objet* des préférences, il n'est pas absurde d'essayer de la définir *objectivement*, sans passer par la préférence, ou les préférences, dont elle l'objet.

Il reste, maintenant, à savoir si les définitions de la liberté et de la diversité présentées dans ce chapitre sont bien à l'origine de "l'attachement du coeur de certains hommes" et si elles représentent des notions à propos desquelles, pour reprendre l'expression de Sen, "les gens discutent et se battent".

Références

[1] R. J. Arneson. Equality and equal opportunity for welfare. *Philosophical Studies*, 56 :77–93, 1989.

[2] R. J. Arneson. Liberalism, distributive subjectivism and equal opportunity for welfare. *Philosophy and Public Affairs*, 19 :158–194, 1990.

[3] K. J. Arrow. A note on freedom and flexibility. In K. Basu, P. Pattanaik, and K. Suzumura, editors, *Choice, Welfare and Development : A Festschrift in Honour of Amartya K. Sen*, chapter 1, pages 7–15. Oxford University Press, Oxford, 1995.

[4] A. Baczkowski, D. N. Joanes, and G. Shamia. Properties of a generalized diversity index. *Journal of Theoretical Biology*, 188 :207–213, 1997.

[5] A. Baczkowski, D. N. Joanes, and G. Shamia. Range of validity of alpha and beta for a generalized diversity index due to good. *Mathematical Bioscience*, 148 :115–128, 1998.

[6] E. Baharad and S. Nitzan. Extended preferences and freedom of choice. *Social Choice and Welfare*, 17 :629–638, 2000.

[7] S. Barberà, W. Bossert, and P. K. Pattanaik. Ranking sets of objects. In S. Barberà, P. Hammond, and C. Seidl, editors, *Handbook of Utility Theory, vol. 2 : Extensions*. Kluwer, Dordrecht. forthcoming.

[8] I. Berlin. *Four Essays on Liberty*. Oxford University Press, Oxford, 1969.

[9] S. Bervoets and N. Gravel. Diversity and ordinal dissimilarity appraisal : an axiomatic approach. IDEP working paper number 03-08, 2003.

[10] W. Bossert. Opportunity sets and individual well-being. *Social Choice and Welfare*, 14 :97–112, 1997.

[11] W. Bossert, M. Fleurbaey, and D. Vandegaer. Responsibility, talent and compensation : A second best analysis. *Review of Economic Design*, 4 :295–312, 1999.

[12] W. Bossert, P. Pattanaik, and Y. Xu. Ranking opportunity sets : An axiomatic approach. *Journal of Economic Theory*, 63 :326–345, 1994.

[13] W. Bossert, P. Pattanaik, and Y. Xu. The measurement of diversity. Technical report, Department of economics, Université de Montréal, 2001. working paper no 2001-17.

[14] W. Bossert, P. Pattanaik, and Y. Xu. Similarity of options and the measurement of diversity. *Journal of Theoretical Politics*, pages 405–421, 2003.

[15] J. M. Buchanan. *The Limits of Liberty*. University of Chicago Press, Chicago, 1975.

[16] J. M. Buchanan. *Liberty, Market and the State*. Wheatsheaf Books, Brighton, 1986.

[17] I. Carter. *A Measure of Freedom*. Oxford University Press, Oxford, UK, 1999.

[18] G. A. Cohen. On the currency of egalitarian justice. *Ethics*, 99 :906–944, 1989.

[19] G. A. Cohen. Equality of what ? on welfare, goods and capabilities. *Recherches économiques de Louvain*, 56 :357–382, 1990.

[20] R. Deb. Waiver, effectivity and rights as game forms. *Economica*, 61 :167–178, 1994.

[21] R. Deb, P. Pattanaik, and L. Razzolini. Game forms, rights and the efficiency of social outcomes. *Journal of Economic Theory*, 72 :74, 1997.

[22] B. Dutta and A. Sen. Ranking opportunity sets and arrow impossibility theorem : Correspondance results. *Journal of Economic Theory*, 71 :90–101, 1996.

[23] R. Dworkin. What is equality ? part 1 : Equality of welfare, part 2 : Equality of ressources. *Philosophy and Public Affairs*, 10 :185–246, 1981.

[24] S. Erlander. Welfare, freedom of choice and composite utility in the logit model. *Social Choice and Welfare*, 2004.

[25] M. Fleurbaey. *Théories Economiques de la Justice*. Economica, Paris, 1996.

[26] M. Fleurbaey. Equality among responsible individuals. In J. F. Laslier, M. Fleurbaey, N. Gravel, and A. Trannoy, editors, *Freedom in Economics : New Perspective in Normative Analysis*. Routledge, London, 1998.

[27] J. Foster. Notes on effective freedom. Mimeo, Vanderbilt University, 1993.

[28] J. Foster. Freedom, opportunity and well-being. In K. Arrow, A. Sen, and K. Suzumura, editors, *Handbook of Social Choice and Welfare*. Elsevier, Amsterdam, 2001. forthcoming.

[29] W. Gaerner, P. Pattanaik, and K. Suzumura. Individual rights revisited. *Economica*, 59 :161–177, 1992.

[30] P. Gardenfors. Rights, games and social choice. *Nous*, 15 :341–356, 1981.

[31] A. Gibbard. A pareto-consistent liberal claim. *Journal of Economic Theory*, 7 :388–410, 1974.

[32] I. J. Good. The population frequencies of species and the estimation of population parameters. *Biometrika*, 40 :237–264, 1953.

[33] N. Gravel. Can a ranking of opportunity sets attach intrinsic importance to freedom of choice ? *American Economic Review : Papers and Proceedings*, 84 :454–458, 1994.

[34] N. Gravel. Ranking opportunity sets on the basis of their freedom of choice and their ability to satisfy preferences : A difficulty. *Social Choice and Welfare*, 15 :371–382, 1998.

[35] N. Gravel, J. Laslier, and A. Trannoy. Individual freedom of choice in a social setting. In J. F. Laslier, M. Fleurbaey, N. Gravel, and A. Trannoy, editors, *Freedom in Economics : New Perspectives in Normative Analysis*, chapter 3. Routledge, London, 1998.

[36] N. Gravel, J. F. Laslier, and A. Trannoy. Consistency between tastes and values : A universalization approach. *Social Choice and Welfare*, 17 :293–320, 2000.

[37] F. V. Hayek. *The Constitution of Liberty*. Routledge, London, 1960.

[38] C. Herrero. Equitable opportunities : An extension. *Economics Letters*, 55 :91–95, 1996.

[39] C. Herrero, I. Iturbe-Ormaetxe, and J. Nieto. Ranking opportunity profiles on the basis of the common opportunities. *Mathematical Social Sciences*, 98 :273–289, 1998.

[40] T. Hurka. Value and population size. *Ethics*, 93 :496–507, 1983.

[41] P. Jones and R. Sugden. Evaluating choices. *International Journal of Law and Economics*, 2 :47–65, 1982.

[42] E. Kant. *Fondements de la métaphysique des moeurs*. Delagrave, Paris, 1967. traduction de V. Delbos.

[43] M. Klemisch-Ahlert. Freedom of choice : A comparison of different rankings of opportunity sets. *Social Choice and Welfare*, 10 :189–207, 1993.

[44] S.-C. Kolm. *Modern Theories of Justice*. MIT Press, Cambridge, MA, 1996.

[45] S. C. Kolm. The values of liberty. In J. Laslier, M. Fleurbaey, N. Gravel, and A. Trannoy, editors, *Freedom in Economics : New Perspective in Normative Analysis*. Routledge, London, 1997. Forthcoming.

[46] C. H. Kraft, J. W. Pratt, and A. Seidenberg. Intuitive probability on finite sets. *Annals of Mathematical Statistics*, 30 :408–419, 1959.

[47] L. Kranich. Equitable opportunities : an axiomatic approach. *Journal of Economic Theory*, 71 :131–147, 1996.

[48] L. Kranich. Equitable opportunities in economic environments. *Social Choice and Welfare*, 14 :57–64, 1997.

[49] D. M. Kreps. A representation theorem for 'preference for flexibility'". *Econometrica*, 47 :565–577, 1979.

[50] A. E. Magurran. *Ecological Diversity and its Measurement*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1998.

[51] K. Nehring. Preference for flexibility in a savagian framework. *Econometrica*, 67 :101–119, 1999.

[52] K. Nehring and C. Puppe. On the multi-preferences approach to evaluating opportunities. *Social Choice and Welfare*, 16 :41–63, 1999.

[53] K. Nehring and C. Puppe. A theory of diversity. *Econometrica*, 70 :1155–1190, 2002.

[54] E. Ok. On opportunity inequality measurement. *Journal of Economic Theory*, 77 :300–329, 1997.

[55] E. Ok and L. Kranich. The measurement of opportunity inequality : A cardinality based approach. *Social Choice and Welfare*, 15 :263–286, 1998.

[56] P. K. Pattanaik and Y. Xu. On ranking opportunity sets in terms of freedom of choice. *Recherches Economiques de Louvain*, 56 :383–390, 1990.

[57] P. K. Pattanaik and Y. Xu. On freedom and preferences. *Theory and Decision*, 44 :173–198, 1998.

[58] P. K. Pattanaik and Y. Xu. On diversity and freedom of choice. *Mathematical Social Sciences*, 40 :123–130, 2000.

[59] P. K. Pattanaik and Y. Xu. On ranking opportunity sets in economic environments. *Journal of Economic Theory*, 93 :48–71, 2000.

[60] B. Peleg. Effectivity functions, games and rights. In J. Laslier, M. Fleurbaey, N. Gravel, and A. Trannoy, editors, *Freedom in Economics : New Perspectives in Normative Analysis*, pages 116–132. Routledge, London, 1998.

[61] C. Puppe. Freedom of choice and rational decisions. *Social Choice and Welfare*, 12 :137–154, 1995.

[62] C. Puppe. An axiomatic approach for 'preferences for freedom of choice'. *Journal of Economic Theory*, 68 :174–199, 1996.

[63] C. Puppe. Individual freedom and social choice. In J. Laslier, M. Fleurbaey, N. Gravel, and A. Trannoy, editors, *Freedom in Economics : New Perspectives in Normative Analysis*, chapter 2. Routlege, 1998.

[64] C. Puppe and Y. Xu. Assessing freedom of choice in terms of essential alternatives. Mimeo, University of Vienna, 1996.

[65] J. Rawls. *A Theory of Justice*. Berknap Press of Harvard University Press, Cambridge, Massachusett, 1971.

[66] J. E. Roemer. *Theories of Justice*. Harvard University Press, Cambridge Massachussets, 1996.

[67] A. Romero-Medina. More on preference and freedom. *Social Choice and Welfare*, 18 :179–191, 2001.

[68] A. K. Sen. The impossibility of a paretian liberal. *Journal of Political Economy*, 78 :152–157, 1970.

[69] A. K. Sen. Well-being, agency and freedom : The dewey lectures 1984. *Journal of Philosophy*, 82 :169–221, 1985.

[70] A. K. Sen. *The Standard of Living*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1987.

[71] A. K. Sen. Freedom of choice : Concept and content. *European Economic Review*, 32 :269–294, 1988.

[72] A. K. Sen. Welfare, freedom and social choice. *Recherches Economiques de Louvain*, 56 :451–486, 1990.

[73] A. K. Sen. Welfare, preferences and freedom. *Journal of Econometrics*, 50 :15–29, 1991.

[74] A. K. Sen. *Inequality Reexamined*. Harvard University Press, Cambridge, MA, 1992.

[75] A. K. Sen. Markets and freedoms : Achivements and limitations of the market mechanism in promoting individual freedoms. *Oxford Economic Papers*, 45 :519–541, 1993.

[76] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27 :379–423, 1948.

[77] R. Sugden. The metric of opportunity. *Economics and Philosophy*, 14 :307–337, 1998.

[78] P. Suppes. Maximizing freedom of decision : An axiomatic approach. In G. Feiwel, editor, *Arrow and the Foundations of the Theory of Economic Policy*, pages 243–254. New York University Press, 1987.

[79] P. Suppes. The nature and measurement of freedom. *Social Choice and Welfare*, 13 :183–200, 1996.

[80] M. VanHees. On the analysis of negative freedom. *Theory and Decision*, 45 :175–197, 1997.

[81] M. VanHees. *Legal Reductionism and Freedom*. Kluwer Academic Press, Dordretch, 2000.

[82] M. VanHees. Acting autonomously vs not acting heteronomously. *Theory and Decision*, 54 :337–355, 2003.

[83] M. L. Weitzman. On diversity. *Quarterly Journal of Economics*, 107 :363–406, 1992.

[84] M. L. Weitzman. What to preserve ? an application of diversity theory to crane conservation. *Quarterly Journal of Economics*, 108 :157–183, 1993.

[85] M. L. Weitzman. The noah's ark problem. *Econometrica*, 66 :1279–1298, 1998.

[86] Y. Xu. On ranking linear budget sets in terms of freedom of choice. *Social Choice and Welfare*, 22 :281–289, 2004.