exercices de microéconomie, 2ème année de magistère

Nicolas Gravel, Université de la Méditerranée

le 5 octobre 2003

Exercice 1: Soit $f(x_1, x_2)$ une fonction de production associée à une technologie admettant des rendements d'échelle constants. Montrer que si la productivité moyenne d'un des facteurs est croissante par rapport au niveau d'utilisation de ce facteur, le produit marginal de l'autre facteur doit être négatif.

Exercice 2. Quelles conditions (le cas échéant) doivent satisfaire les nombres a et b pour que la technologie représentée par l'ensemble de production $Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \leq \ln(a - y_2) - b\}$ satisfasse les conditions d'irréversibilité, d'impossibilité de production gratuite, possibilité de ne rien produire, de libre disposition des excédents et de convexité ?

Exercice 3: Vrai ou faux ? Si une technologie est représentée par une fonction de production $f : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ qui est quasi-concave et qui satisfait $f(0^l) = 0$, alors cette technologie ne peut admettre de rendements d'échelle croissants. (On vous rappelle qu'une fonction de production est quasi-concave si et seulement si, pour tout niveau de production y, l'ensemble $V(y) = \{x \in \mathbb{R}^l_+ : f(x) \geq y\}$ est convexe).

Exercice 4 Dire, pour chacune des fonctions de production suivantes (où $a, b \in \mathbb{R}_{++}$), si la technologie qu'elle représente satisfait les hypothèses vues en classe (en omettant la propriété d'irréversibilité):

(*i*) $f(x_1, x_2) = e^{\min(ax_1, bx_2)}$

(*ii*) $f(x_1, x_2) = ax_1 + x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + bx_2$

(*iii*) $f(x_1, x_2) = ax_1 - x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + bx_2$

(*iv*) $f(x_1, x_2) = \min(1 - a/x_1, 1 - b/x_2)$

Exercice 5 Montrer que si une technologie représentée par une fonction de production $f : R^l_+ \to R$ est additive dans le sens où $f(x+z) = f(x) + f(z)$ pour tout x, $z \in R^l_+$, elle sera convexe si les inputs sont parfaitement divisibles.

Exercice 6: Trouver, pour chaque fonction de production, la fonction de profit qui lui est associée

(a) $f(x) = \ln x$ si $x \geq 1$

$= 0$ autrement

(b) $f(x_1, x_2) = 100 x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}}$

(c) $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2)^{\frac{1}{2}}$ (pour a, $b \in \mathbb{R}_{++}$)

(d) $f(x_1, x_2) = (\min(x_1, x_2))^a$. Quelle propriété doit satisfaire le nombre a pour que la fonction de profit soit bien définie ?

Exercice 7: Que mesure le surplus du producteur défini comme l'intégrale, sous la courbe d'offre de la firme, calculée entre deux prix niveaux de prix d'output quelconque ?

Exercice 8. Une fonction de production f d'une firme qui utilise n inputs pour produire un output est dite "homothétique" si, pour toute liste d'inputs $x \in \mathbb{R}^n_+$, elle peut s'écrire comme $f(x) = h(g(x))$ pour une certaine fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ monotone croissante et pour une certaine fonction $g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ homogène de degré 1. Montrer, sous des hypothèses adéquates, que la fonction de coûts $c : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R}_+$ associée à cette technologie peut s'écrire, pour n'importe quel liste de prix d'inputs $w \in \mathbb{R}^n_+$ et n'importe quel niveau d'output $y \in \mathbb{R}_+$ comme $c(w, y) = k(w)y$ pour une certaine fonction $k : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$.

Exercice 9: Soit une technologie d'une firme monoproduit qui est monotone et convexe. Supposons que le coût moyen soit croissant par rapport au niveau d'output pour tous les niveaux d'inputs et pour toutes les combinaisons de prix des facteurs. Montrer que les rendements d'échelle sur la frontière de l'ensemble de production doivent être partout décroissant.

Exercice 10 Dire, pour chacune des préférences définies ci-dessous, si elles sont monotones croissantes, localement non saturables, convexes, complètes, continues et transitive (Dans chaque cas, on justifie sa réponse et on représente graphiquement les ensembles $FP \succeq$ représentatifs.

(i) $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 \geq y_1$ et max $(x_1, x_2) \geq$ max (y_1, y_2)
(ii) $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \geq y_1 + 2$ ou $x_2 \geq y_2 - 1$

(iii) $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \geq y_1$ ou $x_1 = y_1$ et $x_2 \geq y_2$. Le "ou" de la définition est inutile car $(x_1 = y_1$ et $x_2 \geq y_2) \Rightarrow x_1 \geq y_1$

Exercice 11 Sylvester a des préférences pour le Pop Corn (le bien 1) et le Pepsi Cola (le bien 2) représentées par la fonction d'utilité $U(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$. Trouver les correspondances de demandes marshalliennes de Pepsi-Cola et de Pop Corn de Sylvester et dire si elles sont des correspondances ou des fonctions.

Exercice 12 Crocodile Dundee a des préférences pour les hamburgers (le bien 1) et le champagne (le bien 2) représentées par la fonction d'utilité $U(x_1, x_2) = x_1 + x_2^{\frac{1}{2}}$. Quelles conditions (le cas échéant) les prix auxquels il est confronté et la richesse dont il dispose doivent-ils satisfaire pour que Crocodile choisisse de ne consommer aucun Hamburger ?

Exercice 13 Déterminer le comportement de demande marshallien d'un consommateur dont les préférences pour deux biens sont représentées par la fonction d'utilité

$$U(x_1, x_2) = (1 + x_1)(2 + x_2)$$

(a) Les correspondances de demande Marshallienne sont-t-elles toujours des fonctions ?

(b) Déterminer la fonction d'utilité indirecte, la fonction de dépenses et les correspondances de demandes Hicksiennes.

Exercice 14: Rogatien et Amélie sont tous deux amateurs de vin et de fromage. Rogatien supporte cependant très mal l'alcool de sorte qu'il ne peut s'empêcher de se comporter de façon grossière et machiste dès qu'il consomme la moindre quantité de vin, au grand dam d'Amélie. Si on désigne par g la quantité de grossièretés prononcées par Rogatien et par v la quantité de vin consommée par lui, la relation entre g et v est donnée par $v = g$. Les préférences d'Amélie pour le vin, le fromage et les grossièretés qu'elle doit subir de la part de son compagnon sont décrites par la fonction d'utilité suivante:

$$U_A = \frac{v_A f_A}{g}$$

Les préférences de Rogatien pour le vin et le fromage sont représentées par la fonction d'utilité:

$$U_R = v_R f_R$$

Rogatien et Amélie sont chacun doté initialement de 1/2 unité de vin et 1/2 unité de fromage. On constate, en utilisant le fromage comme numéraire, que le prix du vin s'établit à 1 et que, dans ce contexte, les deux comparses décident de ne consommer ni plus ni moins que le niveau de leur dotation initiale.

(a) Montrer que l'allocation de vin et de fromage qui résulte de l'équilibre concurrentiel n'est pas efficace.

(b) Trouver un taux de taxation Pigouvienne ad valorem du vin qui permettrait de conduire l'économie vers une allocation Pareto-efficace. Que devrait faire l'Etat du produit de cette taxation ? Commenter.

Exercice15 Une communauté se compose de deux individus, Léandre et Éléonore, chacun doté d'une demie unité de salsepareille et de temps disponible. La cueillette de salsepareille s'effectue selon la technologie $S = L$ où S et L désignent, respectivement, la quantité de salsepareille produite et la quantité de travail engagée. Les préférences d'Éléonore et de Léandre pour la salsepareille et le loisir sont représentables, respectivement, par les fonctions d'utilité suivantes:

$$U_E(l_E, x_E) = l_E^{\frac{1}{2}} x_L^{\frac{1}{2}}$$

et

$$U_L(l_L, x_L) = l_L^{\frac{1}{2}} x_L^{\frac{1}{2}}$$

où l_i et x_i (pour $i = E, L$) représentent, respectivement, la quantité de loisir et de salsepareille consommée par i. Dans cette économie, Léandre et

Éléonore vont s'échanger du temps contre de la salsepareille, la seule contrainte est que aucun des deux partenaires ne pourra consommer plus d'une demie unité de temps. Les dotations en temps, contrairement à celles de salsepareille, ne sont pas transférable d'un individu à l'autre. Un gouvernement est chargé de veiller au bien être de nos deux comparses. L'objectif de ce gouvernement est la maximisation de la fonction de bien être social $W()$définie par $W(x_E, x_L, l_E, l_L) = U_E(l_E, x_E)U_L(l_L, x_L)$. Pour atteindre son objectif, le gouvernement ne peut taxer que la salsepareille (il ne peut bien évidemment pas taxer ou distribuer du temps).

a) Trouvez une allocation de temps et de Salsepareille qui soit socialement optimale du point de vue de ce gouvernement

b) Existe-t-il un système de taxation qui permettrait de générer l'allocation calculée en a) comme résultat d'un équilibre général? Si oui, Calculez le .

Exercice 16:. Mutt et Jeff consomment du rutabaga et du temps de loisir. La technologie qui permet de convertir le temps en rutabaga est possédée par Jeff et est décrite par la fonction de production

$$y = 4x^{\frac{1}{2}}$$

où y désigne le nombre d'unités de rutabaga produites et x la quantité de temps utilisée dans cette production. Mutt et Jeff disposent chacun d'1 unité de temps disponible qu'ils peuvent allouer à leur loisir ou au travail de production de rutabaga. Aucune quantité de rutabaga n'est initialement disponible. Les préférences de Mutt et de Jeff pour le loisir (le bien 1) et le rutabaga (le bien 2) sont représentées, respectivement, par les fonctions d'utilité suivantes

$$U^M(x_1^M, x_2^M) = x_1^M x_2^M$$

et

$$U^J(x_1^J, x_2^J) = x_1^J x_2^J$$

où x_j^i (pour $i = J, M,\ j = 1, 2$) désigne la quantité de bien j consommée par l'individu i.

(a) Trouver la fonction de profits

(b) Déterminer les fonctions de demande marshallienne de loisir et de rutabaga des deux agents (en fonction de leur richesse et des prix) en tenant compte des décisions possibles que pourraient prendre certains agents de ne pas travailler.

(c) En prenant le rutabaga comme numéraire, déterminer le salaire réel, les quantités de loisir (ou les quantités de travail), et les quantités de rutabaga allouées à Mutt et Jeff à l'équilibre général concurrentiel de l'économie.

(d) L'allocation de ressources associée à l'équilibre concurrentiel trouvé en (c) est-elle intéressante sur le plan normatif ? Plus précisément, est-elle efficace au sens de Pareto ? Est-elle compatible avec votre conception personnelle de la justice distributive ?

(e) Déterminer l'allocation de loisir et de rutabaga que choisirait un planificateur social utilitariste et comparer, en se référant éventuellement aux commentaires de la question (d), la réponse avec l'allocation "choisie" par le fonctionnement concurrentiel des marchés trouvée en (c).

(f) Peut-on trouver une paire d'impôts et de transferts forfaitaires (1 pour Mutt, 1 pour Jeff) qui équilibrerait le budget de l'Etat tout en permettant à l'économie d'aboutir à l'allocation des ressources calculée en (e) comme résultat d'un équilibre général concurrentiel de marché ? Si non, dire pourquoi. Si oui, trouver ces transferts, déterminer le salaire horaire qui s'établira alors et commenter sa réponse

Exercice 17: On considère une communauté constituée d'un nombre impair n d'individus. Tous ces individus ont les mêmes préférences pour les combinaisons de bien public et de biens privé auxquels ils peuvent avoir accès. En notant Z la quantité de bien public et x la quantité de bien privé, les préférences d'un individu de cette communauté sont représentées par la fonction d'utilité $U : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$U(Z, x) = \ln Z + \ln(1 + x)$$

Les individus diffèrent par leur richesse en bien privé. On note ω_i la richesse de l'individu $i \in \{1, ..., n\}$. Pour toute spécification $(\omega_1, ..., \omega_n)$ de ces niveaux de richesse privée, la communauté doit décider collectivement d'un niveau de production de bien public et d'un financement de cette production au moyen d'un taux unique de taxation $t \in [0, 1]$ de la richesse privée. Si une taxe d'un taux t est choisie par la communauté, l'individu de catégorie i obtiendra la combinaison de bien public et de bien privé $((1 - t)\omega_i, t(\sum_{j=1}^{n} \omega_j))$.

(a) Donner un exemple d'une fonction de décision collective qui, à chaque configuration de richesse privée $(\omega_1, ..., \omega_n)$, associe un classement complet et transitif de l'ensemble $[0, 1]$ des taux de taxe possibles qui satisfait les hypothèses d'Arrow suivantes: Non-dictature, Principe de Pareto, Indépendance par rapport aux alternatives non-pertinentes et qui ne repose que sur une mesurabilité ordinale et non-comparable du bien être individuel. Vous devrez montrer par des arguments heuristiques que votre fonction de décision collective satisfait les trois hypothèses sus-mentionnées dont vous donnerez un énoncé précis. Vous devrez également montrer que cette fonction de décision collective n'utilise qu'une information ordinale et interpersonnellement non-comparable sur les préférences individuelles.

(b) Trouver le taux de taxe que choisirait une communauté de 5 individus de richesses $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 3$ $\omega_4 = 6$ et $\omega_5 = 10$ qui prendrait ses décision en utilisant la fonction de décision collective proposée en (a).

Exercice 18) Imaginez une communauté de n individus, chacun ayant des préférences monotones vis-à-vis d'un seul bien. Dans une telle économie, l'ensemble des allocations possibles consiste en toutes les façons de distribuer une quantité agrégée de ce bien entre les n individus.

Montrez que pour une telle communauté à 1 bien, les critères de Kaldor-Hicks-Scitovsky et de Chipman-Moore-Samuelson, dont vous donnerez la définition précise, vont donner lieu exactement au même classement des diverses positions que peut atteindre cette économie.

Exercice 19) Deux individus, Paul et Jeanne, ne consomment que du vin et du camembert. Leurs dotations initiales sont données par :
$\omega^P = (1, 0)$
$\omega^J = (0, 1)$ où ω_1^i et ω_2^i désignent, respectivement, les quantités de vin et de camembert initialement détenues par l'individu i $(i = J, P)$

Les préférences des deux individus pour les différentes quantités de vin et de camembert qu'ils peuvent consommer sont données par

$$U^P(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

pour Paul
et par

$$U^J(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

pour Jeanne

a) Trouver une allocation qui soit à la fois Pareto optimale et équitable dans cette économie et représenter cette allocation dans un diagramme en boîte d'Edgeworth.

b) Trouver deux allocations x et y telles que x soit équitable et que y ne soit pas équitable mais soit néanmoins Pareto supérieure à x.