1er td d'analyse microéconomique

Nicolas Gravel, Université de la Méditerranée

le 25 septembre 2003

Exercice 1: Soit $f(x_1, x_2)$ une fonction de production associée à une technologie admettant des rendements d'échelle constants. Montrer que si la productivité moyenne d'un des facteurs est croissante par rapport au niveau d'utilisation de ce facteur, le produit marginal de l'autre facteur doit être négatif.

Exercice 2. Quelles conditions (le cas échéant) doivent satisfaire les nombres a et b pour que la technologie représentée par l'ensemble de production $Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \leq \ln(a - y_2) - b\}$ satisfasse les conditions d'irréversibilité, d'impossibilité de production gratuite, possibilité de ne rien produire, de libre disposition des excédents et de convexité ?

Exercice 3: Vrai ou faux ? Si une technologie est représentée par une fonction de production $f : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ qui est quasi-concave et qui satisfait $f(0^l) = 0$, alors cette technologie ne peut admettre de rendements d'échelle croissants. (On vous rappelle qu'une fonction de production est quasi-concave si et seulement si, pour tout niveau de production y, l'ensemble $V(y) = \{x \in \mathbb{R}^l_+ : f(x) \geq y\}$ est convexe).

Exercice 4 Dire, pour chacune des fonctions de production suivantes (où $a, b \in \mathbb{R}_{++}$), si la technologie qu'elle représente satisfait les hypothèses vues en classe (en omettant la propriété d'irréversibilité):

(i) $f(x_1, x_2) = e^{\min(ax_1, bx_2)}$

(ii) $f(x_1, x_2) = ax_1 + x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + bx_2$

(iii) $f(x_1, x_2) = ax_1 - x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + bx_2$

(iv) $f(x_1, x_2) = \min(1 - a/x_1, 1 - b/x_2)$

Exercice 5 Montrer que si une technologie représentée par une fonction de production $f : R^l_+ \to R$ est additive dans le sens où $f(x+z) = f(x)+f(z)$ pour tout x, $z \in R^l_+$, elle sera convexe si les inputs sont parfaitement divisibles.

Exercice 6: Trouver, pour chaque fonction de production, la fonction de profit qui lui est associée

(a) $f(x) = \ln x$ si $x \geq 1$
$\quad\quad\quad = 0$ autrement

(b) $f(x_1, x_2) = 100 x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}}$

(c) $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2)^{\frac{1}{2}}$ (pour a, $b \in \mathbb{R}_{++}$)

(d) $f(x_1, x_2) = (\min(x_1, x_2))^a$. Quelle propriété doit satisfaire le nombre a pour que la fonction de profit soit bien définie ?

Exercice 7: Que mesure le surplus du producteur défini comme l'intégrale, sous la courbe d'offre de la firme, calculée entre deux prix niveaux de prix d'output quelconque ?

Exercice 8: Un statisticien a collecté les informations suivantes sur le comportement d'une firme produisant un output avec deux inputs.

	1er trimestre	2ème trimestre	3ème trimestre
prix de l'output	2	3	2,5
prix de l'input 1	1	0,5	2
prix de l'input 2	1	3	2
quantité produite d'output	100	100	90
quantité utilisée de l'input 1	75	75	50
quantité utilisée de l'input 2	75	55	50

Ce comportement peut-il s'interpréter comme résultant d'une firme qui maximise ses profits dans un environnement concrurrentiel ?

Exercice 9. Une fonction de production f d'une firme qui utilise n inputs pour produire un output est dite "homothétique" si, pour toute liste d'inputs $x \in \mathbb{R}^n_+$, elle peut s'écrire comme $f(x) = h(g(x))$ pour une certaine fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ monotone croissante et pour une certaine fonction $g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ homogène de degré 1. Montrer, sous des hypothèses adéquates, que la fonction de coûts $c : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R}_+$ associée à cette technologie peut s'écrire, pour n'importe quel liste de prix d'inputs $w \in \mathbb{R}^n_+$ et n'importe quel niveau d'output $y \in \mathbb{R}_+$ comme $c(w, y) = k(w)y$ pour une certaine fonction $k : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$.

Exercice 10: Considérons un consommateur $i \in N$, doté initialement d'une quantité $\omega^i_j \in \mathbb{R}_+$ de chaque bien $j \in L = \{1, ..., l\}$, possédant une fraction $\theta^i_k \in [0, 1]$ de chaque entreprise $k \in K = \{1, ..., m\}$ et qui est confronté au vecteur de prix $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_{++}$. Considérons la fonction $V_i : \mathbb{R}^l_{++} \times \mathbb{R}^l_+ \times [0, 1]^m \to \mathbb{R}$ définie par

$$V_i(\mathbf{p}, \omega^i_1, ..., \omega^i_l, \theta^i_1, ..., \theta^i_m) = \max_{\mathbf{x} \in B^i(p_1,...,p_l,\omega^i_1,...,\omega^i_l,\theta^i_1,...,\theta^i_m)} U_i(\mathbf{x})$$

Montrer que l'expression

$$\frac{\frac{p_j \partial V_i(.)}{\partial p_j}}{\frac{\partial V_i(.)}{\partial \omega_j}}$$

peut s'interpréter comme l'offre nette de bien j de ce consommateur. Commenter.

Exercice 11 Une relation de préférence est homothétique si elle peut être représentée par une fonction homogène de degré 1. Montrer que si une relation de préférence est homothétique, alors les effets prix croisés sont égaux ($\frac{\partial x^M_i(.)}{\partial p_j} = \frac{\partial x^M_j(.)}{\partial p_i}$ pour toute paire de bien i et j)

Exercice 12

(a) Les préférences de Shasikanta pour différents paniers de biens qu'il peut se procurer sont définies de la manière suivante. Pour chaque paire de paniers A et B, Shasikanta trouve le panier A strictement préférable au panier B si le panier A contient une quantité strictement plus grande d'au moins un bien que le panier B. Par ailleurs, Shasikanta n'est indifférent entre deux paniers A et B que si ces paniers sont égaux (i.e. contiennent les mêmes quantités des deux biens). Dire, en le justifiant, si les préférence de Shasikanta sont transitives, complètes, continues, localement non saturables et convexes.

(b) Les préférences $\succeq$ de Titus pour le vin (le bien 1) et la bière (le bien 2) sont définies par

$$(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 \geq y_1 + y_2 \text{ et } \max\ (x_1, x_2) \geq \max\ (y_1, y_2)$$

Dire, en le justifiant, si les préférence de Titus sont transitives, complètes, continues, localement non saturables et convexes.

Exercice 13 Mahdi consomme trois biens. On a observé attentivement son comportement de consommation et on a recueilli sur celui-ci les informations suivantes

observation	p_1	p_2	p_3	x_1	x_2	x_3
1	1	2	3	3	2	1
2	2	1	3	3,5	2	0,5
3	2	2,25	1	2	3	1

Le comportement de Mahdi satisfait-t-il l'axiome faible de la préférence révélée ? Le comportement de consommation de Mahdi est-t-il conforme aux postulats de la théorie du consommateur ?