Problems on production theory (Mastère AE2, first year)

Nicolas Gravel, Université de la Méditerranée

le 30 septembre 2008

Exercice 1: Soit $f(x_1, x_2)$ une fonction de production associée à une technologie admettant des rendements d'échelle constants. Montrer que si la productivité moyenne d'un des facteurs est croissante par rapport au niveau d'utilisation de ce facteur, le produit marginal de l'autre facteur doit être négatif.

Exercice 2. Quelles conditions (le cas échéant) doivent satisfaire les nombres a et b pour que la technologie représentée par l'ensemble de production $Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \leq \ln(a - y_2) - b\}$ satisfasse les conditions d'irréversibilité, d'impossibilité de production gratuite, possibilité de ne rien produire, de libre disposition des excédents et de convexité ?

Exercice 3: Vrai ou faux ? Si une technologie est représentée par une fonction de production $f : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ qui est quasi-concave et qui satisfait $f(0^l) = 0$, alors cette technologie ne peut admettre de rendements d'échelle croissants. (On vous rappelle qu'une fonction de production est quasi-concave si et seulement si, pour tout niveau de production y, l'ensemble $V(y) = \{x \in \mathbb{R}^l_+ : f(x) \geq y\}$ est convexe).

Exercice 4 Dire, pour chacune des fonctions de production suivantes (où $a, b \in \mathbb{R}_{++}$), si la technologie qu'elle représente satisfait les hypothèses vues en classe (en omettant la propriété d'irréversibilité):

(i) $f(x_1, x_2) = e^{\min(ax_1, bx_2)}$

(ii) $f(x_1, x_2) = ax_1 + x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + bx_2$

(iii) $f(x_1, x_2) = ax_1 - x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + bx_2$

(iv) $f(x_1, x_2) = \min(1 - a/x_1, 1 - b/x_2)$

Exercice 5 Montrer que si une technologie représentée par une fonction de production $f : R^l_+ \to R$ est additive dans le sens où $f(x + z) = f(x) + f(z)$ pour tout x, $z \in R^l_+$, elle sera convexe si les inputs sont parfaitement divisibles.

Exercice 6: Trouver, pour chaque fonction de production, la fonction de profit qui lui est associée

(a) $f(x) = \ln x$ si $x \geq 1$

$\quad = 0$ autrement

(b) $f(x_1, x_2) = 100 x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}}$

(c) $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2)^{\frac{1}{2}}$ (pour a, $b \in \mathbb{R}_{++}$)

(d) $f(x_1, x_2) = (\min(x_1, x_2))^a$. Quelle propriété doit satisfaire le nombre a pour que la fonction de profit soit bien définie ?

Exercice 7: Que mesure le surplus du producteur défini comme l'intégrale, sous la courbe d'offre de la firme, calculée entre deux prix niveaux de prix d'output quelconque ?

Exercice 8: Un statisticien a collecté les informations suivantes sur le comportement d'une firme produisant un output avec deux inputs.

	1er trimestre	2ème trimestre	3ème trimestre
prix de l'output	2	3	2,5
prix de l'input 1	1	0,5	2
prix de l'input 2	1	3	2
quantité produite d'output	100	100	90
quantité utilisée de l'input 1	75	75	50
quantité utilisée de l'input 2	75	55	50

Ce comportement peut-il s'interpréter comme résultant d'une firme qui maximise ses profits dans un environnement concurrentiel ?

Exercice 9. Une fonction de production f d'une firme qui utilise n inputs pour produire un output est dite "homothétique" si, pour toute liste d'inputs $x \in \mathbb{R}_+^n$, elle peut s'écrire comme $f(x) = h(g(x))$ pour une certaine fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ monotone croissante et pour une certaine fonction $g : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ homogène de degré 1. Montrer, sous des hypothèses adéquates, que la fonction de coûts $c : \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R}_+$ associée à cette technologie peut s'écrire, pour n'importe quel liste de prix d'inputs $w \in \mathbb{R}_+^n$ et n'importe quel niveau d'output $y \in \mathbb{R}_+$ comme $c(w, y) = k(w)y$ pour une certaine fonction $k : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$.

Exercice 10: Soit une technologie d'une firme monoproduit qui est monotone et convexe. Supposons que le coût moyen soit croissant par rapport au niveau d'output pour tous les niveaux d'inputs et pour toutes les combinaisons de prix des facteurs. Montrer que les rendements d'échelle sur la frontière de l'ensemble de production doivent être partout décroissant.

Exercice 11 Lesquelles (laquelle) des fonctions suivantes peuvent être des fonctions de coûts d'une entreprise monoproduit évoluant sur un marché des facteurs concurrentiel (justifier).

(i) $C(p, y) = p_1^{\frac{3}{4}} p_2^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{2}}$
(ii) $C(p, y) = 2(p_1 p_2 y)^{\frac{1}{2}}$
(iii) $C(p, y) = (p_1 + (p_1 p_2)^{\frac{1}{2}} + p_2)y$
(iv) $C(p, y) = (p_1 - (p_1 p_2)^{\frac{1}{2}} + p_2)y$
(v) $C(p, y) = (p_1 e^{-p_1} + p_2)y$
(vi) $C(p, y) = (p_1 p_2)^{\frac{1}{2}}(y + \frac{1}{y})$

Exercice 12 Pour quelles valeurs des paramètres $(a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ les deux fonctions suivantes peuvent être des demandes conditionnelles d'une firme monoproduit utilisant deux facteurs de production ?

$$
\begin{aligned}
x_1(p_1, p_2, y) &= (a + b p_1^{\alpha} p_2^{\beta}) y \\
x_2(p_1, p_2, y) &= (c + d p_1^{\gamma} p_2^{\delta}) y
\end{aligned}
$$