Université de la Méditerranée
UFR de Sciences Economiques et de Gestion — Année 2007/08
$4^{\text{ième}}$ année — Examen de seconde chance
filière : AE2 M1 et Magistère 2
Enseignant responsable : N. Gravel

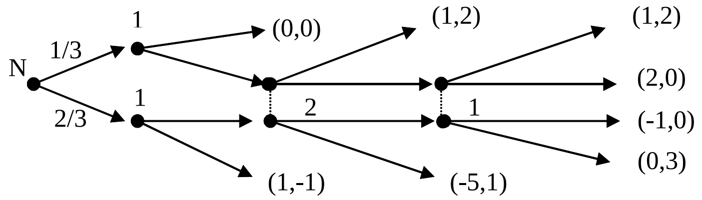
# EXAMEN DE THEORIE DES JEUX

Durée totale de l'épreuve : 3h
Documents autorisés: aucun

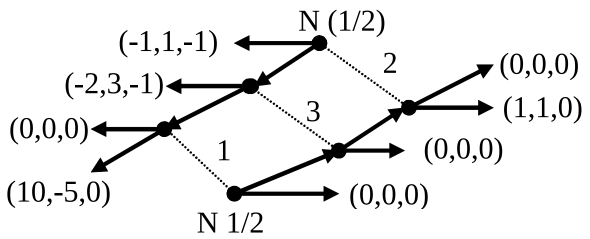
---

**Question 1 (3 points) :** Pour chacun des jeux sous forme extensive suivants, dire si l'hypothèse de mémoire parfaite est satisfaite. Justifier avec soin.

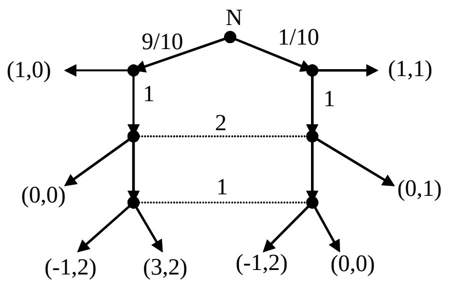
a)




b)




c)




**Question 2 (3 points)** Compaq est un leader sur le marché des micro-ordinateurs. Elle choisit, au début de l'année, le nombre de micro-ordinateurs qu'elle choisira de produire. Dell est le seul autre concurrent sérieux de Compaq. Dell observe la production de Compaq avant de décider de la sienne. La fonction de coûts de Compaq est $C_C(q) = 4q + 6q^2$ tandis que celle de Dell est $C_D(q) = 4q + 2q^2$. La fonction de demande pour les micro-ordinateurs est $Q = 188 - \frac{p}{2}$ où $p$ est le prix.

(a) (1/2 point) Imaginons que Dell s'engage par écrit à produire, après avoir observé la production de Compaq, 42 unités de micro-ordinateurs. Que choisirait alors de produire Compaq s'il prêtait foi en l'engagement de Dell ? Etant donné ce choix de Compaq, Dell aurait-t-il intérêt à produire ses 42 unités ?

(b)(1 points) Montrer que la situation étudiée en (a) n'est pas parfaite en sous-jeu. Déterminer l'unique équilibre parfait en sous-jeu de ce jeu (souvent appelé "équilibre de Stackleberg").

(c) (1 1/2 points) Illustrer graphiquement votre réponse. Expliquer pourquoi Dell est victime de son incapacité à s'engager de manière crédible.

**Question 3 (4 points)** Démontrer heuristiquement les énoncés suivants:

(1) (1 point) S'il existe une unique combinaison de stratégies qui résulte d'une procédure d'élimination itérative de stratégies faiblement dominées, alors cette combinaison est nécessairement un équilibre de Nash.

(2) (1 point) S'il existe une unique combinaison de stratégies qui résulte d'une procédure d'élimination itérative de stratégies strictement dominées (et ce à chaque étape de la procédure d'élimination), alors cette combinaison constitue l'unique équilibre de Nash du jeu.

**Question 4 (3 points)** On considère le jeu sous forme normale à trois joueurs suivant (le joueur 1 choisit une ligne, le joueur 2 choisit une colonne et le joueur 3 choisit une matrice)

| | **gauche** | **droite** |
|---|---|---|
| **haut** | 1,2,0 | 2,3,1 |
| **bas** | 0,1,3 | 1,1,4 |

**A**

| | **gauche** | **droite** |
|---|---|---|
| **haut** | 1,1,2 | 2,3,4 |
| **bas** | 0,0,0 | 1,2,2 |

**B**

| | **gauche** | **droite** |
|---|---|---|
| **haut** | 1,0,3 | 5,1,2 |
| **bas** | 10,6,6 | 8,6,1 |

**C**

Faire une prédiction de l'issue du jeu et indiquer le concept de solution utilisé.

**Question 5 (4 points)** On considère le jeu sous forme normale à deux joueurs suivants

| | **gauche** | **droite** |
|---|---|---|
| **haut** | 5,2 | 1,1 |
| **bas** | -1,-1 | 2,5 |

a) (1 point) Déterminer tous les équilibres de Nash du jeu (en stratégies pures et en stratégies mixtes).

b) (1 point) Supposons que les joueurs observent parfaitement un signal aléatoire (par exemple le temps qu'il fait) et qu'ils puissent adopter une stratégie de type: le joueur ligne joue haut et le joueur colonne joue gauche s'il fait beau et les deux joueurs jouent, respectivement, bas et droite s'il fait mauvais. Les joueurs ont-il intérêt à se comporter de la sorte, s'ils anticipent de la part de l'autre un tel comportement ? Justifier avec soin. Déterminer également le paiement que recevront en moyenne les joueurs s'ils adoptent une telle corrélation, en supposant que les deux états climatiques ont une probabilité égale de survenir

c) (2 points) Supposons maintenant que les deux joueurs puissent baser leur choix de stratégie sur l'observation d'un signal aléatoire *imparfait* (par exemple le tirage d'une boule d'une urne). Imaginons par exemple qu'il y ait 3 boules dans une urne: une rouge, une noire et une verte. Une boule est tirée et un signal imparfarfait est envoyé à chaque joueur sur le résultat du tirage. Les signaux sont les suivants. Le joueur qui choisit la ligne sait si la boule est verte ou non, mais n'a aucune information sur la couleur de la boule tirée si celle-ci n'est pas verte. Le joueur qui choisit la colonne sait si la boule est noire ou non, mais n'a aucune information sur la couleur de la boule tirée si celle-ci n'est pas noire. Imaginons, avec Aumann, que les joueurs basent leur décision sur le signal qu'ils reçoivent. Construire une combinaison de stratégies basée sur ces signaux qui soit un équilibre correlé. Montrer que cet équilibre correlé permet à chacun des joueur d'obtenir, en moyenne, un meilleur paiement que celui obtenu dans l'équilibre correlé fondée sur une information parfaite étudié en b). Qu'en concluez vous sur la valeur stratégique de l'information ?

**Question 6 (3 points)** Archibald, Irma et Nestor veulent faire un cadeau à leur camarade Bianca qui part en congé de maternité. Ils doivent mettre une somme d'argent dans une enveloppe scellée et donner cette enveloppe à leur secrétaire qui se chargera d'acheter le cadeau. Archibald, Irma et Nestor disposent, respectivement, d'un montant maximal de 100, 200 et 300 euros à consacrer à ce cadeau. Les préférences d'Archibald, Irma et Nestor pour le bien privé (dont la quantité est désignée par $x$) et la valeur du cadeau donné à Bianca (désignée par $Z$) sont représentées, respectivement, par les fonctions d'utilité $U_A(.)$, $U_I(.)$ et $U_N(.)$ suivantes

$$U_A(x, Z) = x^{\frac{1}{2}} Z^{\frac{1}{2}} = U_I(x, Z)$$

et

$$U_N = 2Z^{\frac{1}{2}} + x$$

(a) Quelle contribution au cadeau de Bianca choisiront de faire Archibald, Irma et Nestor à l'équilibre de Nash ? (2 points)

(b) Montrer que les contributions choisies ne sont pas efficaces au sens de Pareto (1 point).