Solution des exercices de microéconomie, 2ème année de magistère

Nicolas Gravel, Université de la Méditerranée

le 5 octobre 2003

Exercice 1: Soit $f(x_1, x_2)$ une fonction de production associée à une technologie admettant des rendements d'échelle constants. Montrer que si la productivité moyenne d'un des facteurs est croissante par rapport au niveau d'utilisation de ce facteur, le produit marginal de l'autre facteur doit être négatif.

Solution: Puisque la technologie admet des rendements d'échelle constants, la fonction $f(.)$ est homogène de degré 1. On a donc:

$$\frac{f(x_i, x_j)}{x_i} = f(1, \frac{x_j}{x_i}) = g(\frac{x_j}{x_i}) = g(z)$$

pour $i = 1, 2$. La condition de productivité moyenne du facteur i croissante par rapport au niveau d'utilisation de ce facteur signifie

$$\frac{\partial(\frac{f(x_1,x_2)}{x_i})}{\partial x_i} = -\frac{\partial g()}{\partial z}\frac{x_j}{x_i^2} > 0$$

ce qui implique évidemment que

$$\frac{\partial g()}{\partial z} = \frac{\partial f()}{\partial x_j} < 0$$

Exercice 2. Quelles conditions (le cas échéant) doivent satisfaire les nombres a et b pour que la technologie représentée par l'ensemble de production $Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \leq \ln(a - y_2) - b\}$ satisfasse les conditions d'irréversibilité, d'impossibilité de production gratuite, possibilité de ne rien produire, de libre disposition des excédents et de convexité ?

Solution

(i) Evidemment, quelque soit $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $y_1 \leq \ln(a - y_2) - b \Longleftrightarrow e^{y_1} \leq \frac{a-y_2}{e^b} \Leftrightarrow y_2 \leq a - e^{y_1}e^b$. L'irréversibilité est vérifiée si et seulement si a et b sont tels que, quelque soit $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $((y_1, y_2) \neq (0, 0))$ $\;y_2 \leq a - e^{y_1}e^b \Leftrightarrow -y_2 > a - e^b/e^{y_1}$. Cette condition doit être valable également si $y_2 = a - e^{y_1}e^b$. On doit donc avoir $-y_2 = -a + e^{y_1}e^b > a - e^b/e^{y_1} \Leftrightarrow \frac{e^b}{e^{y_1}}(e^{2y_1} - 1) > 2a \Rightarrow a < 0$ (car l'inégalité doit être valable même lorsque $y_1 \to 0$). Dans l'autre sens, si $a < 0$,

$y_2 \leq 0$ et le signe de y_1 n'est pas contraint. On ne peut donc jamais inverser additivement le signe de (y_1, y_2) si $a < 0$ et si $y_2 \leq a - e^{y_1}e^b$. Donc la condition nécessaire et suffisante que doivent satisfaire a et b pour que la technologie soit irréversible est que $a < 0$.

-(ii) Il satisfera l'impossibilité de production gratuite si ($y_1 \geq 0$ et $y_2 \geq 0$) $\Rightarrow$ ($y_1 = y_2 = 0$). De manière équivalente, $(y_1 > 0) \Rightarrow (y_2 < 0)$ et $(y_2 > 0) \Rightarrow (y_1 < 0)$. Supposons $y_1 > 0$. Dans ce cas, la condition $a \leq 0$ et $b \geq 0$ est nécessaire et suffisante pour obtenir que $y_2 < 0$ pour tout y_1 positif. Si $y_2 > 0$, la technologie n'est définie que si $a > 0$. Dans ce cas, on aura $y_1 < 0$ que si $\ln a - b \leq 0$. Comme les deux séries de conditions ($a \leq 0$ et $b \geq 0$ d'une part et $a > 0$ et $\ln a - b \leq 0$ d'autre part) sont incompatibles, on ne garde que la condition $a \leq 0$ et $b \geq 0$ qui implique donc que le bien 2 soit toujours un input..

-(iii) Il satisfera la possibilité de ne rien produire si $0 \leq \ln a - b \Leftrightarrow \ln a \geq b$. On remarque que cette condition ne peut jamais être vérifiée si $a < 0$. Cette technologie ne peut donc pas vérifier simultanément la possibilité de ne rien produire et l'irréversibilité.

-(iv) convexité: Supposons (y_1, y_2) et (z_1, z_2) tels que $y_1 \leq \ln(a - y_2) - b$ et $z_1 \leq \ln(a - y_2) - b$. Nous savons que $\lambda y_1 \leq \lambda \ln(a - y_2) - \lambda b$ et que $(1 - \lambda) z_1 \leq (1 - \lambda) \ln(a - z_2) - (1 - \lambda) b$ pour $\lambda \in [0, 1]$. Nous savons donc que $\lambda y_1 + (1-\lambda) z_1 \leq \lambda \ln(a - y_2) + (1-\lambda) \ln(a - z_2) - b \leq \ln(a - \lambda y_2 - (1-\lambda) z_2) - b$ car la fonction $\Phi(x) = \ln(a - x)$ est une fonction concave (sa dérivée seconde est négative) et satisfait donc $\Phi(\lambda x + (1-\lambda) z) \geq \lambda \Phi(x) + (1-\lambda) \Phi(z)$.

Exercice 3: Vrai ou faux ? Si une technologie est représentée par une fonction de production $f : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ qui est quasi-concave et qui satisfait $f(0^l) = 0$, alors cette technologie ne peut admettre de rendements d'échelle croissants. (On vous rappelle qu'une fonction de production est quasi-concave si et seulement si, pour tout niveau de production y, l'ensemble $V(y) = \{x \in \mathbb{R}^l_+ : f(x) \geq y\}$ est convexe).

Réponse: Faux. Considérons la technologie suivante (les inputs sont représentés par des nombres positifs):

$$Y = \{(y, x_1, ..., x_l) \in \mathbb{R}^{l+1}_+ \mid y \leq x_1^2 x_2^2 ... x_n^2\}$$

Un ensemble $V(y)$ associé à cette technologie est défini par

$$V(y) = \{(x_1, ..., x_l) \in \mathbb{R}^l_+ \mid y \leq x_1^2 x_2^2 ... x_n^2\}$$

On vérifie aisément que cet ensemble est convexe (prendre théorème des fonctions implicites ou faire un dessin dans $\mathbb{R}^2_+$). Or cette technologie admet des rendements d'échelle croissant car si, par exemple, à partir d'une combinaison de facteurs $(x_1, ..., x_l) \in \mathbb{R}^l_+$ permettant de produire au maximum y unités d'output, on double l'échelle de production, on pourra produire $(2x_1)^2 (2x_2)^2 ... (2x_n)^2 = 4y$ unités d'output.

Exercice 4 Dire, pour chacune des fonctions de production suivantes (où $a, b \in \mathbb{R}_{++}$), si la technologie qu'elle représente satisfait les hypothèses vues en classe (en omettant la propriété d'irréversibilité):

(i) $f(x_1, x_2) = e^{\min(ax_1, bx_2)}$
(ii) $f(x_1, x_2) = ax_1 + x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + bx_2$
(iii) $f(x_1, x_2) = ax_1 - x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + bx_2$
(iv) $f(x_1, x_2) = \min(1 - a/x_1, 1 - b/x_2)$

(i) L'ensemble de production décrit par cette technologie n'est pas convexe (par exemple les activités productives $(1, 0, 0)$ et $(e, \frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ sont technologiquement possibles mais la combinaison convexe $(\frac{e+1}{2}, \frac{1}{2a}, \frac{1}{2b})$ ne l'est pas $(\frac{e+1}{2} > e^{\frac{1}{2}} = f(\frac{1}{2a}, \frac{1}{2b})$. L'ensemble de production viole en outre l'impossibilité de production gratuite $f(0, 0) = e^0 = 1 > 0$ et la possibilité de ne rien produire

(ii) La technologie décrite par la fonction de production $f(x_1, x_2) = ax_1 + (x_1 x_2)^{\frac{1}{2}} + bx_2$ satisfait toutes les conditions vues en classe (on vérifie que la fonction est concave en constatant que $f_{ii} = \frac{-x_j^{\frac{1}{2}}}{4x_i^{\frac{3}{2}}} \leq 0$ pour $i = 1, 2$ et $j \neq i$ et $f_{11} f_{22} - f_{12}^2 = \frac{1}{16x_i x_2} - \frac{1}{16x_i x_2} \geq 0$

(iii) La technologie décrite par la fonction de production $f(x_1, x_2) = ax_1 - (x_1 x_2)^{\frac{1}{2}} + bx_2$ ne satisfait l'hypothèse de libre disposition des excédents car la fonction de production n'est pas monotone croissante (ses dérivées partielles ne sont pas positives). Par exemple

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = a - \frac{1}{2}(\frac{x_2}{x_1})^{\frac{1}{2}} < 0 \text{ si } \frac{x_2}{x_1} > 4a^2$$

Elle n'est pas convexe car, si on considère les combinaisons d'emplois des facteurs $x = (\frac{b}{a}, 0)$ et $z = (0, 1)$. On remarque que ces deux combinaisons permettent de produire (au maximum) b unités d'output car $f(\frac{b}{a}, 0) = f(0, 1) = b$. Considérons maintenant la combinaison $(\frac{b}{2a}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$. Elle permet de produire

$$f(\frac{b}{2a}, \frac{1}{2}) = b - \frac{1}{2}(\frac{b}{a})^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}) < b$$

ce qui viole la convexité.

(iv) La technologie représentée par la fonction de production $f(x_1, x_2) = \min(1 - a/x_1, 1 - b/x_2)$ ne satisfait pas la possibilité de non-production (pour produire 0 output, il faut utiliser $a > 0$ unités d'input 1 et $b > 0$ unités d'input 2. Par ailleurs, il est impossible d'opérer la technologie si on utilise aucun input. Toutes les autres hypothèses sont vérifiées (en particulier la convexité). preuve. Considérons n'importe quelle paire d'activités productives (y, x_1, x_2) et (y', x_1', x_2') techniquement possibles. On doit montrer que $(ty + (1-t)y', tx_1 + (1-t)x_1', tx_2 + (1-t)x_2')$ est également techniquement possible pour tout nombre $t \in [0, 1]$. (y, x_1, x_2) est techniquement possible ssi

$$y \leq \min(1 - a/x_1, 1 - b/x_2)$$

De même, (y', x_1', x_2') est techniquement possible ssi

$$y' \leq \min(1 - a/x_1', 1 - b/x_2')$$

Evidemment, si $t \in [0,1]$

$$ty \leq t \min(1 - a/x_1, 1 - b/x_2)$$

et

$$(1-t)y' \leq (1-t) \min(1 - a/x'_1, 1 - b/x'_2)$$

L'addition de ces deux inégalités nous donne donc

$$ty + (1-t)y' \leq t \min(1 - a/x_1, 1 - b/x_2) + (1-t) \min(1 - a/x'_1, 1 - b/x'_2) \tag{A}$$

Nous remarquons que, quelque soient les nombres α et β positifs, $1 - a/\alpha \leq 1 - b/\beta \Leftrightarrow \beta \geq \frac{b}{a}\alpha$. Posant $\Phi_1(x) = 1 - a/x_1$ et $\Phi_2(x) = 1 - b/x$, nous avons donc que $\min(\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_i)) = \Phi_i(x_i) \Leftrightarrow \min(\Phi_1(tx_1), \Phi_2(tx_i)) = \Phi_i(tx_i)$ pour tout nombre t (pour $i = 1, 2$). Par ailleurs on vérifie que les fonctions Φ_i ($i = 1, 2$) sont concaves (leur dérivée seconde est nulle). Nous savons donc que

$$\begin{aligned} & t \min(1 - a/x_1, 1 - b/x_2) + (1-t) \min(1 - a/x'_1, 1 - b/x'_2) && (1) \\ \leq \quad & \min(\Phi_1(tx_1 + (1-t)x'_1), \Phi_2(tx_2 + (1-t)x'_2)) && (2) \end{aligned}$$

La combinaison des inégalités (A) et (**??**) nous permet donc de conclure à la faisabilité technique de l'activité productive $(ty + (1-t)y', tx_1 + (1-t)x'_1, tx_2 + (1-t)x'_2)$.

Exercice 5 Montrer que si une technologie représentée par une fonction de production $f : R^l_+ \to R$ est additive dans le sens où $f(x+z) = f(x) + f(z)$ pour tout x, $z \in R^l_+$, elle sera convexe si les inputs sont parfaitement divisibles.

Réponse: Par l'absurde, supposons $(\mathbf{x}, y)$, $(\mathbf{x}', y')$ et t (avec $(\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^l_+$ et y, $y' \in \mathbb{R}_+$ et $t \in [0,1])$ tels que $y \leq f(\mathbf{x})$ et $y' \leq f(\mathbf{x}')$ mais, en violation de la convexité, tels que

$$ty + (1-t)y' > f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}') \tag{3}$$

Par additivité l'inégalité (3) implique que

$$ty + (1-t)y' > f(t\mathbf{x}) + f((1-t)\mathbf{x}')$$

ce qui, en conjonction avec $y \leq f(\mathbf{x})$ et $y' \leq f(\mathbf{x}')$ implique forcément l'une ou l'autre des deux violations suivantes de la divisibilité

$$ty > f(t\mathbf{x})$$

ou

$$(1-t)y' > f((1-t)\mathbf{x}')$$

C.Q.F.D.

exercice 6: Trouver, pour chaque fonction de production, la fonction de profit qui lui est associée

(a) $f(x) = \ln x$ si $x \geq 1$
$= 0$ autrement

Réponse:

$$\pi(w,p) = \max_x \ p \ln x - wx$$

. L'entreprise peut s'assurer un profit nul en ne produisant pas et en n'employant aucun facteur de production. La condition de premier ordre (que doit nécessairement satisfaire un niveau strictement positif x^*d'emploi du facteur de production) est:

$$\frac{p}{x^*} = w \Leftrightarrow x^* = \frac{p}{w}$$

on a donc $\pi(w) = p(\ln p - \ln w - 1)$ si $p(\ln p - \ln w - 1) \geq 0 \Leftrightarrow w \leq \frac{p}{e}$ et $\pi(w) = 0$ sinon.

(b) $f(x_1, x_2) = 100x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}}$

Réponse:

$$\begin{aligned} \pi(w_1, w_2, p) &= \max_{x_1, x_2} = p100x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}} - w_1 x_1 - w_2 x_2 \\ x_i &\geq 0 \ i = 1, 2 \end{aligned}$$

Les conditions de premier ordre que doivent nécessairement satisfaire des solutions intérieures x_1^*, x_2^* de ce programme sont:

$$50p \frac{x_2^{*\frac{1}{4}}}{x_1^{*\frac{1}{2}}} - w_1 = 0 \Leftrightarrow x_1^* = 2500p^2 \frac{x_2^{*\frac{1}{2}}}{w_1^2} \tag{foc1}$$

et

$$25p \frac{x_1^{*\frac{1}{2}}}{x_2^{*\frac{3}{4}}} - w_2 = 0 \tag{foc2}$$

Substituant (foc1) dans (foc2), on obtient:

$$25p \frac{50px_2^{*\frac{1}{4}}}{w_1 x_2^{*\frac{3}{4}}} = w_2 \Leftrightarrow x_2^* = \frac{p^4 1250^2}{w_1^2 w_2^2}$$

et, en resubstituant cette expression dans (foc1)

$$x_1^* = \frac{2p^4 1250^2}{w_1^3 w_2}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\pi(w_1,w_2,p) &= p100(p^4\frac{2500\times 1250}{w_1^3w_2})^{\frac{1}{2}}(\frac{p^4 1250^2}{w_1^2w_2^2})^{\frac{1}{4}} - w_1p^4\frac{2500\times 1250}{w_1^3w_2} - w_2\frac{p^4 1250^2}{w_1^2w_2^2}\\ &= 76p^4\frac{250^2}{w_1^2w_2}\end{aligned}$$

(c) $f(x_1,x_2) = (ax_1+bx_2)^{\frac{1}{2}}$ (pour a, $b\in\mathbb{R}_{++}$)

Réponse:
Cette technologie admet une substituabilité parfaite entre les deux facteurs de production (à un taux marginal de substitution constant de $\frac{a}{b}$). La politique d'emploi de la firme sera donc simple. Elle n'emploiera que du facteur 2 si $\frac{w_1}{w_2} > \frac{a}{b}$ (cas 1), elle n'emploiera que du facteur 1 si $\frac{w_1}{w_2} < \frac{a}{b}$ (cas 2) et sera indifférente entre n'importe quel mixte d'emploi des deux facteurs dans l'invraisemblable autre cas où $\frac{w_1}{w_2} = \frac{a}{b}$. Dans le cas i ($i=1,2$), la firme résout :

$$\max_{x_i} p\alpha_i x_i^{\frac{1}{2}} - w_ix_i$$

où $\alpha_1 = a^{\frac{1}{2}}$et $\alpha_2 = b^{\frac{1}{2}}$. La condition de premier ordre que satisfait nécessairement une solution intérieure à ce programme nous permet d'obtenir:

$$x_i^* = \frac{p^2\alpha_i^2}{4w_i^2}$$

La fonction de profit de la firme sera donc de forme

$$\pi(w_1,w_2,p) = \frac{p^2}{4}\max(\frac{a}{w_1},\frac{b}{w_2})$$

(d) $f(x_1,x_2) = (\min(x_1,x_2))^a$. Quelle propriété doit satisfaire le nombre a pour que la fonction de profit soit bien définie ?

Réponse:
Cette technologie admet une complémentarité parfaite entre les deux facteurs de production de sorte que tout emploi optimal (du point de vue de la firme) de ces deux facteurs doit satisfaire $x_1^* = x_2^* = x^*$. Le problème que résout l'entreprise devient donc

$$\max_x px^a - (w_1+w_2)x$$

Ce problème n'est bien défini que si $0\leq a\leq 1$ (rendements d'échelles non-croissants). Evidemment, si $a=1$, les rendements d'échelles sont constants de sorte que les profits maximaux doivent être nuls pour tout niveau commun d'emploi des facteurs, ce qui ne se produira avec de la production positive que si $p = w_1 + w_2$. Dans le cas où $a < 1$, on détermine le niveau d'emploi optimal des deux facteurs par la condition de premier ordre, soit

$$x^* = (\frac{ap}{w_1 + w_2})^{\frac{1}{1-a}}$$

d'où on tire

$$\begin{aligned} \pi(w_1, w_2, p) &= p(\frac{ap}{w_1 + w_2})^{\frac{a}{1-a}} - (w_1 + w_2)(\frac{ap}{w_1 + w_2})^{\frac{1}{1-a}} \\ &= (\frac{(ap)}{(w_1 + w_2)^a})^{\frac{1}{1-a}}(\frac{1}{a} - 1) \end{aligned}$$

Exercice 7: Que mesure le surplus du producteur défini comme l'intégrale, sous la courbe d'offre de la firme, calculée entre deux prix niveaux de prix d'output quelconque ?

Réponse:
Par le lemme d'Hotelling, nous savons que

$$y(\overline{\mathbf{w}}, \overline{p}) \equiv \frac{\partial \pi(\overline{w}, \overline{p})}{\partial p}$$

Le surplus du producteur $s(p_0, p_1)$ entre deux niveaux de prix p_0 et p_1 est donné par

$$s(p_0, p_1) = \int_{p_0}^{p_1} y(\overline{\mathbf{w}}, \overline{p})dp = \pi(\overline{w}, p_1) - \pi(\overline{w}, p_0)$$

Exercice 8. Une fonction de production f d'une firme qui utilise n inputs pour produire un output est dite "homothétique" si, pour toute liste d'inputs $x \in \mathbb{R}^n_+$, elle peut s'écrire comme $f(x) = h(g(x))$ pour une certaine fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ monotone croissante et pour une certaine fonction $g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ homogène de degré 1. Montrer, sous des hypothèses adéquates, que la fonction de coûts $c : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R}_+$ associée à cette technologie peut s'écrire, pour n'importe quel liste de prix d'inputs $w \in \mathbb{R}^n_+$ et n'importe quel niveau d'output $y \in \mathbb{R}_+$ comme $c(w, y) = k(w)y$ pour une certaine fonction $k : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$.

Solution

Montrons d'abord que si $g : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction homogène de degré 1, la fonction de coût correspondant à la technologie représentée par g, notée $C^g : \mathbb{R}^{n+1}_+ \to \mathbb{R}_+$, et définie, pour tous prix $(p_1, ..., p_n)$ et tout niveau de production $\overline{y}$, par

$$C^g(p_1, ..., p_n, \overline{y}) = \min_{(x_1,...,x_n)} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \text{ sous contrainte que } g(x_1, ..., x_n) \geq \overline{y}$$

peut s'écrire comme $C^g(p_1, ..., p_n, \overline{y}) = \Phi(p_1, ..., p_n)\overline{y}$ avec $\Phi : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ définie, pour tous prix $(p_1, ..., p_n)$,par $\Phi(p_1, ..., p_n) = C^g(p_1, ..., p_n, 1)$.

Pour démontrer cela, il est suffisant de montrer que si $(x_1^*, ...x_n^*)$ est une combinaison d'inputs qui minimise le coût de produire une unité d'output aux prix $(p_1, ..., p_n)$, alors $(\overline{y}x_1^*, ..., \overline{y}x_n^*)$ minimise le coût de produire $\overline{y}$ unités d'output aux mêmes prix. Puisque $(x_1^*, ...x_n^*)$ minimise le coût de produire une unité d'output, on a donc $g(x_1^*, ..., x_n^*) \geq 1 \Leftrightarrow \overline{y}g(x_1^*, ..., x_n^*) \geq \overline{y} \Leftrightarrow g(\overline{y}x_1^*, ..., \overline{y}x_n^*) \geq \overline{y}$ (car g est homogène de degré 1). Nous savons donc que $(\overline{y}x_1^*, ..., \overline{y}x_n^*)$ permet de produire au moins $\overline{y}$ unité d'output. Supposons par l'absurde que $(\overline{y}x_1^*, ..., \overline{y}x_n^*)$ ne soit pas la manière la moins coûteuse de produire $\overline{y}$ unités d'output aux prix $(p_1, ..., p_n)$ et qu'il existe une combinaison d'inputs $(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n)$ telle que $g(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n) \geq \overline{y}$ et $\sum_{j=1}^{n} p_j\widehat{x}_j < \sum_{j=1}^{n} p_j\overline{y}x_j^* \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} p_j(\widehat{x}_j/\overline{y}) < \sum_{j=1}^{n} p_jx_j^*$ (A). Puisque g est homogène de degré 1, $g(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n) \geq \overline{y} \Leftrightarrow g(\widehat{x}_1/\overline{y}, ..., \widehat{x}_n/\overline{y}) \geq 1$ et, donc, $(\widehat{x}_1/\overline{y}, ..., \widehat{x}_n/\overline{y})$ permet de produire 1 unité d'output. Mais ce fait est contradictoire avec l'inégalité (A) et la définition de $(x_1^*, ...x_n^*)$ comme combinaison d'inputs qui minimise le coût de produire une unité d'output aux prix $(p_1, ..., p_n)$, et cette contradiction complète la preuve que $C^g(p_1, ..., p_n, \overline{y}) = \Phi(p_1, ..., p_n)\overline{y}$. Puisque la fonction de production f peut s'écrire comme $f(x_1, ..., x_n) = h(g(x_1, ..., x_n))$, on peut dire que $g(x_1, ..., x_n) = h^{-1}(y)$ (car la fonction d'une variable h est monotone croissante et, donc, inversible si elle est continue, ce que l'on peut supposer sans crainte). On peut donc écrire la fonction de coût $C : \mathbb{R}_+^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$associée à la technologie représentée par f définie, pour tous prix $(p_1, ..., p_n)$ et tout niveau de production $\overline{y}$, par

$$C(p_1, ..., p_n, \overline{y}) = \min_{(x_1,...,x_n)} \sum_{j=1}^{n} p_jx_j \text{ sous contrainte que } g(x_1, ..., x_n)) \geq h^{-1}(\overline{y})$$

comme $C^g(p_1, ..., p_n, \overline{y}) = \Phi(p_1, ..., p_n)h^{-1}(\overline{y})$.

Exercice 9: Soit une technologie d'une firme monoproduit qui est monotone et convexe. Supposons que le coût moyen soit croissant par rapport au niveau d'output pour tous les niveaux d'inputs et pour toutes les combinaisons de prix des facteurs. Montrer que les rendements d'échelle sur la frontière de l'ensemble de production doivent être partout décroissants.

Solution: Soit $(x_1^*, ..., x_n^*)$, une combinaison d'inputs qui résout, pour un vecteur de prix $(p_1, ..., p_n)$ et un niveau d'output y donnés, le programme

$$C(p_1, ..., p_n, y) = \min_{(x_1,...,x_n)} \sum_{j=1}^{n} p_jx_j \text{ sous contrainte que } (x_1, ..., x_n, y) \text{ soit techniquement possible}$$

Considérons tout niveau d'output $y' > y$. Puisque les Soit $(x_1', ..., x_n')$ permettant de produire y' au coût minimum aux prix $(p_1, ..., p_n)$. Puisque le coût moyen est croissant, on a $(\sum_{j=1}^{n} p_jx_j')/y' > \sum_{j=1}^{n}(p_jx_j^*)/y \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} p_jx_j' > \sum_{j=1}^{n}(p_j\frac{y'}{y}x_j^*)$. Cette dernière inégalité n'est compatible avec la définition de $(x_1', ..., x_n')$ comme combinaison d'inputs qui minimise le coût de produire y' à prix $(p_1, ..., p_n)$ que si la combinaison d'inputs $(\frac{y'}{y}x_1^*, ..., \frac{y'}{y}x_n^*)$ ne permet pas de produire y'. On a donc que $(x_1^*, ..., x_n^*, y)$ est techniquement possible mais que $(\frac{y'}{y}x_1^*, ..., \frac{y'}{y}x_n^*, \frac{y'}{y}y)$ n'est pas techniquement possible, ce qui implique donc que les rendements sont décroissants. CQFD

Exercice 10 Dire, pour chacune des préférences définies ci-dessous, si elles sont monotones croissantes, localement non saturables, convexes, complètes, continues et transitive (Dans chaque cas, on justifie sa réponse et on représente graphiquement les ensembles $FP \succeq$ représentatifs.

(i) $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 + x_2 \geq y_1$ et max $(x_1, x_2) \geq$ max (y_1, y_2)

Réponse: On remarque immédiatement que, pour tous paniers (x_1, x_2) et (y_1, y_2), max $(x_1, x_2) \geq$ max $(y_1, y_2) \Rightarrow x_1 + x_2 \geq$ max $(y_1, y_2) \geq y_1$. La préférence $\succeq$ est donc en fait définie par $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow$ max $(x_1, x_2) \geq$ max (y_1, y_2). Ces préférences sont évidemment complètes et transitives (prouver le!), et sont monotones croissantes (si $(x_1, x_2) \geq (y_1, y_2)$, on a nécessairement max $(x_1, x_2) \geq$ max (y_1, y_2) et si $x_i > y_i$ pour $i = 1, 2$, on a nécessairement max $(x_1, x_2) >$ max (y_1, y_2)). Puisqu'elles sont monotones croissantes, elles sont localement non-saturables. Elles sont pas ailleurs continues mais ne sont PAS convexes car, par exemple, $(2, 10)$ et $(10, 2)$ appartiennent à l'ensemble des paniers faiblement préférés à $(10, 2)$ mais le panier $(6, 6) = (\frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}10, \frac{1}{2}10 + \frac{1}{2}2)$ est strictement moins bien que $(10, 2)$. L'ensemble $FP \succeq (z_1, z_2)$ est comme illustré ci-dessous

(ii) $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \geq y_1 + 2$ ou $x_2 \geq y_2 - 1$

Réponse: Ces préférences **sont complètes**. En effet considérons deux paniers (x_1, x_2) et (y_1, y_2) quelconques. Puisque la relation $\geq$ (définie sur l'ensemble des nombres réels) est complète, l'un des quatre cas de figures (mutuellement exclusifs) suivants est forcément vérifié:

1) $x_1 \geq y_1 + 2$ et $x_2 \geq y_2 - 1$
2) $x_1 \geq y_1 + 2$ et $x_2 < y_2 - 1$
3) $x_1 < y_1 + 2$ et $x_2 \geq y_2 - 1$
4) $x_1 < y_1 + 2$ et $x_2 < y_2 - 1$.

Les cas 1) à 3) impliquent que l'un ou l'autre des énoncés $x_1 \geq y_1 + 2$ ou $x_2 \geq y_2 - 1$ soient vérifié et donc, par définition de $\succeq$, que $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ soit vrai. Le cas 4) implique pour sa part que $x_2 < y_2 - 1$ et donc, que $x_2 - 1 < x_2 + 1 < y_2$, ce qui implique donc, par la définition de $\succeq$, que $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$ soit vrai. Quelques soient donc les paniers (x_1, x_2) et (y_1, y_2), on peut toujours écrire soit $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$, soit $(y_1, y_2) \succeq (x_1, x_2)$.

Ces préférences **ne sont pas transitives** comme l'illustre l'exemple des paniers $(2, 2)$, $(2, 3)$ et $(2, 4)$. On a en effet que $(2, 2) \succeq (2, 3)$ (car $2 \geq 3 - 1 = 2$) et que $(2, 3) \succeq (2, 4)$ (car $3 \geq 4 - 1 = 3$). Pourtant $(2, 2) \succeq (2, 4)$ n'est pas vrai. Ces préférences **ne sont pas monotone croissantes** car, par exemple, $(2, 3)$ contient strictement plus de chaque bien que $(1, 2)$ mais n'est pas strictement

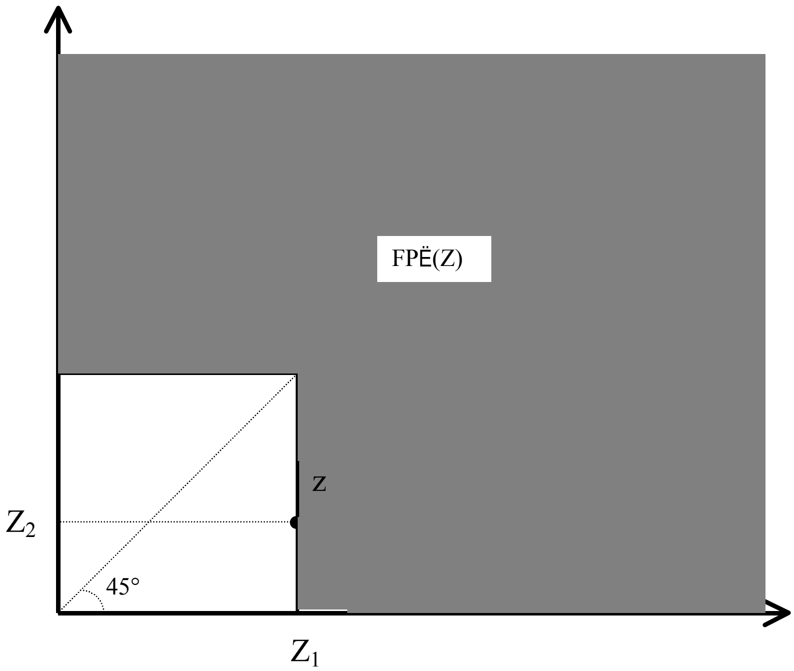

Figure 1:

mieux que $(1,2)$. Elles **ne sont par localement non-saturables** (car aucun des paniers contenant une quantité $(1 \pm \varepsilon, 2 \pm \varepsilon)$ n'est strictement préféré à $(1,2)$ si $\varepsilon \leq 1$. Et elles ne **sont pas convexes** (exemple: $(3,0) \succeq (1,2)$ et $(1,1) \succeq (1,2)$ mais $(2, \frac{1}{2}) \succeq (1,2)$ n'est pas vérifié. (Faire un dessin)

(iii) $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2) \Leftrightarrow x_1 \geq y_1$ ou $x_1 = y_1$ et $x_2 \geq y_2$. Le "ou" de la définition est inutile car $(x_1 = y_1$ et $x_2 \geq y_2) \Rightarrow x_1 \geq y_1$ OK

Exercice 11 Sylvester a des préférences pour le Pop Corn (le bien 1) et le Pepsi Cola (le bien 2) représentées par la fonction d'utilité $U(x_1, x_2) = -\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}$. Trouver les correspondances de demandes marshalliennes de Pepsi-Cola et de Pop Corn de Sylvester et dire si elles sont des correspondances ou des fonctions.

Réponse: Après vérification de la convexité et du caractère localement non-saturable des préférences, on peut caractériser localement une solution du programme de maximisation résolu par les demandes Marshalliennes (notées $x_1^M(p_1, p_2, R)$, $x_2^M(p_1, p_2, R)$ par les égalités

$$TMS(x_1^M(.), x_2^M(.)) = \frac{\frac{\partial U(x_1^M(.), x_2^M(.))}{\partial x_1}}{\frac{\partial U(x_1^M(.), x_2^M(.))}{\partial x2}} = \frac{\frac{1}{x_1^M(.)^2}}{\frac{1}{x_2^M(.)^2}} = \frac{x_2^M(.)^2}{x_1^M(.)^2} = \frac{p_1}{p_2} \tag{4}$$

et

$$p_1 x_1^M(.) + p_2 x_2^M(.) = R \tag{5}$$

Ecrivant l'équation (4) sous la forme

$$x_2^M(.) = (\frac{p_1}{p_2})^{\frac{1}{2}} x_1^M(.)$$

et en substituant dans (5) on obtient:

$$p_1 x_1^M(.) + p_2[(\frac{p_1}{p_2})^{\frac{1}{2}} x_1^M(.)] = R$$

d'où on tire (après simplification)

$$x_1^M(p_1, p_2, R) = \frac{R}{p_1^{\frac{1}{2}}(p_1^{\frac{1}{2}} + p_2^{\frac{1}{2}})}$$

En resubstituant dans (4) (ou en exploitant la symmétrie des préférences par rapport aux deux biens qui implique évidemment la symmétrie des comportements optimaux de consommation), on obtient

$$x_2^M(p_1, p_2, R) = \frac{R}{p_2^{\frac{1}{2}}(p_1^{\frac{1}{2}} + p_2^{\frac{1}{2}})}$$

Exercice 12 Crocodile Dundee a des préférences pour les hamburgers (le bien 1) et le champagne (le bien 2) représentées par la fonction d'utilité $U(x_1, x_2) =$

$x_1 + x_2^{\frac{1}{2}}$. Quelles conditions (le cas échéant) les prix auxquels il est confronté et la richesse dont il dispose doivent-ils satisfaire pour que Crocodile choisisse de ne consommer aucun Hamburger ?

Réponse: Procédant comme dans le problème précédent, on écrit (en notant les demandes Marshalliennes des biens 1 (Hambuger) et 2 (champagne) respectivement par $x_1^M(p_1, p_2, R)$ et $x_2^M(p_1, p_2, R)$):

$$TMS(x_1^M(.), x_2^M(.)) = \frac{\frac{\partial U(x_1^M(.), x_2^M(.))}{\partial x_1}}{\frac{\partial U(x_1^M(.), x_2^M(.))}{\partial x2}} = \frac{1}{\frac{1}{2x_2^M(.)^{\frac{1}{2}}}} = 2x_2^M(.)^{\frac{1}{2}} = \frac{p_1}{p_2} \tag{6}$$

et

$$p_1 x_1^M(.) + p_2 x_2^M(.) = R \tag{7}$$

on obtient

$$x_2^M(.) = 4(\frac{p_1}{p_2})^2$$

et, après substitution dans (7),

$$\begin{aligned} p_1 x_1^M(.) + \frac{4p_1^2}{p_2} &= R \Leftrightarrow \\ x_1^M(.) &= \frac{R}{p_1} - 4\frac{p_1}{p_2} \end{aligned}$$

mais cette méthodologie suppose évidemment que les quantités optimales de bien 1 et 2 appartiennent au domaine de définitions de ces variables, c'est à dire à $\mathbb{R}_+^2$. Il faut donc, en particulier, que $\frac{R}{p_1} - 4\frac{p_1}{p_2} \geq 0$. Si $\frac{R}{p_1} < 4\frac{p_1}{p_2}$, Crocodile Dundee ne consommera pas de Hamburger et consacrera toute sa richesse disponible à l'achat de bien 2. La condition recherchée est donc que $R \leq 4\frac{p_1^2}{p_2}$.

Exercice 13 Déterminer le comportement de demande marshallien d'un consommateur dont les préférences pour deux biens sont représentées par la fonction d'utilité

$$U(x_1, x_2) = (1 + x_1)(2 + x_2)$$

(a) Les correspondances de demande Marshallienne sont-t-elles toujours des fonctions ?

Réponse: On détermine les demandes Marshalliennes $x_1^M(p_1, p_2, R)$ et $x_2^M(p_1, p_2, R))$ en résolvant les équations:

$$TMS(x_1^M(.), x_2^M(.)) = \frac{\frac{\partial U(x_1^M(.), x_2^M(.))}{\partial x_1}}{\frac{\partial U(x_1^M(.), x_2^M(.))}{\partial x2}} = \frac{2 + x_2^M(.)}{1 + x_1^M(.)} = \frac{p_1}{p_2} \tag{8}$$

et

$$p_1 x_1^M(.) + p_2 x_2^M(.) = R \tag{9}$$

L'équation (8) peut se réécrire

$$x_2^M(.) = \frac{p_1}{p_2}(1 + x_1^M(.)) - 2$$

Ce qui nous donne, après substitution dans (9) et simplification

$$x_1^M(.) = \frac{R - p_1 + 2p_2}{2p_1}$$

et donc

$$x_2^M(.) = \frac{R + p_1 - 2p_2}{2p_2}$$

On voit donc bien que les demandes Marshalliennes sont des fonctions (un seul panier est associé est choisi à toute configuration de prix et de richesses).

(b) Déterminer la fonction d'utilité indirecte, la fonction de dépenses et les correspondances de demandes Hicksiennes.

Solution:

Utilité indirecte:

$$\begin{aligned} V(p_1, p_2, R) &= U(x_1^M(p_1, p_2, R), x_2^M(p_1, p_2, R)) \\ &= (1 + x_1^M(p_1, p_2, R)(2 + x_2^M(p_1, p_2, R) \\ &= (\frac{R + 2p_2}{2p_1} + \frac{1}{2})(1 + \frac{R + p_1}{2p_2}) \end{aligned}$$

Dépense: A trouver.

Exercice 14: Rogatien et Amélie sont tous deux amateurs de vin et de fromage. Rogatien supporte cependant très mal l'alcool de sorte qu'il ne peut s'empêcher de se comporter de façon grossière et machiste dès qu'il consomme la moindre quantité de vin, au grand dam d'Amélie. Si on désigne par g la quantité de grossièretés prononcées par Rogatien et par v la quantité de vin consommée par lui, la relation entre g et v est donnée par $v = g$. Les préférences d'Amélie pour le vin, le fromage et les grossièretés qu'elle doit subir de la part de son compagnon sont décrites par la fonction d'utilité suivante:

$$U_A = \frac{v_A f_A}{g}$$

Les préférences de Rogatien pour le vin et le fromage sont représentées par la fonction d'utilité:

$$U_R = v_R f_R$$

Rogatien et Amélie sont chacun doté initialement de 1/2 unité de vin et 1/2 unité de fromage. On constate, en utilisant le fromage comme numéraire, que le prix du vin s'établit à 1 et que, dans ce contexte, les deux comparses décident de ne consommer ni plus ni moins que le niveau de leur dotation initiale.

(a) Montrer que l'allocation de vin et de fromage qui résulte de l'équilibre concurrentiel n'est pas efficace.

(b) Trouver un taux de taxation Pigouvienne ad valorem du vin qui permettrait de conduire l'économie vers une allocation Pareto-efficace. Que devrait faire l'Etat du produit de cette taxation ? Commenter.

Réponse: On remarque d'abord que la présence d'un effet externe (les grossièretés) n'influence pas le comportement de consommation d'Amélie. Celui-ci, comme celui de Rogatien, peut être décrit par la résolution du programme

$$\max_{v_i, f_i} v_i f_i \text{ sous contrainte que } p_v v_i + p_f f_i \leq R_i$$

où, pour $i = A, R$, $R_i = \frac{p_v}{2} + \frac{p_f}{2}$. En résolvant ce programme, on trouve les demandes Marshallienne de vin et de fromage des deux individus :

$$\begin{aligned} v_i^M(p_v, p_f, R_i) &= \frac{R_i}{2p_v} = \frac{1}{4} + \frac{1p_f}{4p_v} \text{ et} \\ f_i^M(p_v, p_f, R_i) &= \frac{R_i}{2p_f} = \frac{1}{4} + \frac{1p_v}{4p_f} \end{aligned}$$

Puisque $p_v = p_f = 1$, on a alors que l'allocation de fromage, de vin et de grossièretés d'équilibre général est

$$\begin{aligned} v_A^M(1,1,1) &= \frac{1}{2} = f_A^M(1,1,1) = \frac{1}{2} = \\ v_R^M(1,1,1) &= \frac{1}{2} = f_R^M(1,1,1) = \frac{1}{2} = g \end{aligned}$$

soit, comme l'énonçait la question, l'allocation autarcique. Cette allocation n'est pas Pareto efficace. Pour le voir, imaginons qu'Amélie propose à Rogatien de lui acheter une petite quantité ε de vin en lui donnant, pour le compenser du déplaisir qu'il subira, petit peu de fromage. La quantité de fromage Δf qu'elle devra lui donner en compensation est définie par l'équation

$$\begin{aligned} dU^R &= \frac{-\partial U^R(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\partial v}\varepsilon + \frac{\partial U^R(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\partial f}\Delta f = 0 \\ &\Leftrightarrow \\ \Delta f &= \frac{\frac{\partial U^R(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\partial v}}{\frac{\partial U^R(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\partial f}}\varepsilon = TMS_{vf}^R(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\varepsilon. \text{ Or, on a que} \\ TMS_{vf}^R(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= 1 \end{aligned}$$

Rogatien est, par définition de $\Delta f = \varepsilon$, indifférent entre $(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon)$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Par contre, la variation d'utilité qu'enregistre Amélie du fait de sa décision est

$$\begin{aligned}
dU^A &= \frac{\partial U^A(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{\partial v}\varepsilon - \frac{\partial U^A(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{\partial f}\varepsilon - \frac{\partial U^A(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}{\partial g}\varepsilon \\
&= \frac{\partial((\frac{1}{2}\frac{1}{2})/\frac{1}{2})}{\partial v}\varepsilon - \frac{\partial((\frac{1}{2}\frac{1}{2})/\frac{1}{2})}{\partial f}\varepsilon - \frac{\partial((\frac{1}{2}\frac{1}{2})/\frac{1}{2})}{\partial g}\varepsilon \\
&= \varepsilon - \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

On peut donc améliorer le bien être d'Amélie sans détériorer celui de Rogatien. L'existence de cette possibilité de gains unanimes est incompatible avec l'efficacité Parétienne. Qu'arriverait-t-il si on procédait à la taxation évoquée dans la question ? La consommation de vin et de Fromage d'Amélie serait:

$$\begin{aligned}
v_A^M(p_v,p_f,R_i) &= \frac{1}{2(5/6)} = \frac{3}{5} \text{ et} \\
f_A^M(p_v,p_f,R_i) &= \frac{1}{2(4/3)} = \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

tandis que les consommations de Rogatien deviendraient:

$$\begin{aligned}
v_R^M(p_v,p_f,R_i) &= \frac{1}{2(5/4)} = \frac{2}{5} \text{ et} \\
f_R^M(p_v,p_f,R_i) &= \frac{1}{2(4/5)} = \frac{5}{8}
\end{aligned}$$

Remarquons que Rogatien atteint un niveau d'utilité d'1/4 avec cette allocation, soit la même utilité que celle qu'il atteignait dans le régime autarcique. Amélie pour sa part atteint maintenant un niveau d'utilité de $\frac{\frac{9}{40}}{\frac{2}{5}} = \frac{9}{16}$ qui est plus élevé que le niveau d'utilité d'1/2 qu'elle atteignait avant l'introduction de cette fiscalité. La fiscalité proposée est donc recommandable car elle représente une amélioration au sens de Pareto par rapport à la situation précédente (Q: L'allocation obtenue dans ce régime fiscal est-elle Pareto efficace ?)

Exercice15 Une communauté se compose de deux individus, Léandre et Éléonore, chacun doté d'une demie unité de salsepareille et de temps disponible. La cueillette de salsepareille s'effectue selon la technologie $S = L$ où S et L désignent, respectivement, la quantité de salsepareille produite et la quantité de travail engagée. Les préférences d'Éléonore et de Léandre pour la salsepareille et le loisir sont représentables, respectivement, par les fonctions d'utilité suivantes:

$$U_E(l_E, x_E) = l_E^{\frac{1}{2}} x_L^{\frac{1}{2}}$$

et

$$U_L(l_L, x_L) = l_L^{\frac{1}{2}} x_L^{\frac{1}{2}}$$

où l_i et x_i (pour $i = E, L$) représentent, respectivement, la quantité de loisir et de salsepareille consommée par i. Dans cette économie, Léandre et Éléonore vont s'échanger du temps contre de la salsepareille, la seule contrainte est que aucun des deux partenaires ne pourra consommer plus d'une demie unité de temps. Les dotations en temps, contrairement à celles de salsepareille, ne sont pas transférable d'un individu à l'autre. Un gouvernement est chargé de veiller au bien être de nos deux comparses. L'objectif de ce gouvernement est la maximisation de la fonction de bien être social $W()$définie par $W(x_E, x_L, l_E, l_L) = U_E(l_E, x_E)U_L(l_L, x_L)$. Pour atteindre son objectif, le gouvernement ne peut taxer que la salsepareille (il ne peut bien évidemment pas taxer ou distribuer du temps).

a) Trouvez une allocation de temps et de Salsepareille qui soit socialement optimale du point de vue de ce gouvernement

Réponse: A une transformation monotone croissante près, le gouvernement veut résoudre:

$$\max_{l_E, x_E l_L, x_L} \frac{1}{2}\ln l_E + \frac{1}{2}\ln x_E + \frac{1}{2}\ln l_L + \frac{1}{2}\ln x_L$$

$$\begin{aligned} \text{sous les contraintes que } l_i &\in [0, \frac{1}{2}] \text{ pour } i = E,\ L \text{ et} \\ x_E + x_L &\leq 2 - l_E - l_L \end{aligned}$$

Dans la mesure ou la fonction objective du gouvernement est symmétrique et concave par rapport aux deux individus, la résolution du programme exigera que les deux individus consomme les mêmes quantité de loisir et de salsepareille. En notant l et x ses quantités, le programme peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \max_{l,x} \ln l + \ln x \text{ sous les contraintes que } l &\in [0, \frac{1}{2}] \text{ et} \\ x &\leq 1 - l \end{aligned}$$

Dans la mesure où la contrainte $x \leq 1 - l$ sera saturée à l'optimum (pourquoi ?), on peut encore écrire ce programme comme

$$\max_{l} \ln l + \ln(1 - l) \text{ sous contrainte que } l \in [0, \frac{1}{2}]$$

Supposons d'abord que la contrainte $l \in [0, \frac{1}{2}]$ ne soit pas serrée. La condition de premier ordre que satisferait nécessairement une solution intérieure l^* de ce programme dans ce cas de figure serait:

$$\frac{1}{l^*} = \frac{1}{1 - l^*}$$

qui nous conduit à trouver $l^* = \frac{1}{2}$. La contrainte $l \in [0, \frac{1}{2}]$ étant satisfaite, on accepte donc cette solution du problème sans contrainte comme solution du problème contraint. On trouve donc comme allocation Pareto-efficace de loisir et de salsepareille $(l_E^*, x_E^*, l_L^*, x_L^*) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ soit la solution autarcique.

b) Existe-t-il un système de taxation qui permettrait de générer l'allocation calculée en a) comme résultat d'un équilibre général ? Si oui, Calculez le

Réponse: Utilisant la salsepareille comme numéraire, et remarquant que les profits maximaux associés à la technologie de ce problème (faisant l'objet de rendements d'échelle constants) seront nuls, nous voulons trouver un salaire horaire w et des transferts forfaitaires T_i satisfaisant $T_E + T_L = 0$ et tels que

$$\begin{aligned} l_i^M(w, 1, \frac{w}{2} + \frac{1}{2} + T_i) &= \frac{\frac{w}{2} + \frac{1}{2} + T_i}{2w} = \frac{1}{2} \ (i = E, L) \\ x_i^M(w, 1, \frac{w}{2} + \frac{1}{2} + T_i) &= \frac{w}{4} + \frac{T_i}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \ (i = E, L) \end{aligned}$$

On trouve immédiatement $w = 1$ et $T_i = 0$. Interpréter ce résultat.

Exercice 16:. Mutt et Jeff consomment du rutabaga et du temps de loisir. La technologie qui permet de convertir le temps en rutabaga est possédée par Jeff et est décrite par la fonction de production

$$y = 4x^{\frac{1}{2}}$$

où y désigne le nombre d'unités de rutabaga produites et x la quantité de temps utilisée dans cette production. Mutt et Jeff disposent chacun d'1 unité de temps disponible qu'ils peuvent allouer à leur loisir ou au travail de production de rutabaga. Aucune quantité de rutabaga n'est initialement disponible. Les préférences de Mutt et de Jeff pour le loisir (le bien 1) et le rutabaga (le bien 2) sont représentées, respectivement, par les fonctions d'utilité suivantes

$$U^M(x_1^M, x_2^M) = x_1^M x_2^M$$

et

$$U^J(x_1^J, x_2^J) = x_1^J x_2^J$$

où x_j^i (pour $i = J, M,\ j = 1, 2$) désigne la quantité de bien j consommée par l'individu i.

(a) Trouver la fonction de profits

Réponse: Pour déterminer la fonction de profit $\pi(p_1)$ (en posant $p_2 = 1$, ce qui revient à supposer que le rutabaga est le numéraire de cette économie)

$$\pi(p_1) = \max_{x_1} 4x_1^{\frac{1}{2}} - p_1 x_1$$

La condition de 1er ordre nécessaire à une solution intérieure x_1^* à ce programme nous donne

$$x_1^* = \frac{4}{p_1^2}$$

et donc

$$\pi(p_1) = 4x_1^{*\frac{1}{2}} - p_1 x_1^* = \frac{8}{p_1} - \frac{4}{p_1} = \frac{4}{p_1}$$

(b) Déterminer les fonctions de demande marshallienne de loisir et de rutabaga des deux agents (en fonction de leur richesse et des prix) en tenant compte des décisions possibles que pourraient prendre certains agents de ne pas travailler.

(c) En prenant le rutabaga comme numéraire, déterminer le salaire réel, les quantités de loisir (ou les quantités de travail), et les quantités de rutabaga allouées à Mutt et Jeff à l'équilibre général concurrentiel de l'économie.

Réponse:Les fonctions de demandes Marshalliennes de bien j ($j = 1, 2$) pour un individu doté de richesse R (obtenues comme solution de la maximisation d'utilité sous contrainte budgétaire) sont

$$x_j^M(p_1, p_2, R) = \frac{R}{2p_j}$$

Nous savons en outre que $R_M = p_1$ et que $R_J = p_1 + \pi(p_1) = p_1 + \frac{4}{p_1}$. On a donc une demande de loisir inélastique de loisir de la part de Mutt de $\frac{1}{2}$. Pour Jeff, la demande de loisir est de

$$x_1^M(p_1, p_2, R) = \frac{p_1 + \frac{4}{p_1}}{2p_1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{p_1^2}$$

si $\frac{1}{2} + \frac{2}{p_1^2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{p_1^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow p_1 \geq 2$ et de $x_1^M(p_1, p_2, R) = 1$ autrement. Jeff ne travaillera donc que si le salaire horaire net est supérieur à 2. On détermine le salaire horaire d'équilibre en apurant le marché du travail. Pour faire cet apurement, il faut tenir compte du comportement d'offre de travail de Jeff. Supposons d'abord que Jeff ne travaille pas. L'équilibre du marché du travail requiert que la quantité demandée de travail soit égale à la quantité offerte, soit

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{p_1^2} \Leftrightarrow p_1 = \sqrt[2]{8} > 2\sqrt[2]{\frac{1}{2}}$$

donc le salaire qui apure le marché du travail sous l'hypothèse où Jeff ne travaille pas est incompatible avec cette hypothèse. Il faut donc supposer que Jeff travaille, dans un quel cas, l'équilibre du marché du travail est décrit par l'équation

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{p_1^2} = \frac{4}{p_1^2} \Leftrightarrow \frac{6}{p_1^2} = 1 \Leftrightarrow p_1^* = \sqrt[2]{6}$$

avec ce salaire, la consommation de loisir de Jeff est de $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ et sa consommation de rutaba est donnée par $1/\sqrt[2]{6} + 4/\sqrt[2]{6} = \frac{5}{\sqrt[2]{6}}$. La consommation de loisir de Mutt est évidemment de $1/2$ alors que sa consommation de rutabaga est de $\frac{1}{2}p_1^* = \frac{1}{2}(6)^{\frac{1}{2}}$. unités de rutabaga. On a donc comme allocation d'équilibre général

$$(x_1^{J*}, x_2^{J*}, x_1^{M*}, x_2^{M*}) = (5/6, \frac{5}{\sqrt[2]{6}}, 1/2, \frac{\sqrt[2]{6}}{2}$$

(d) L'allocation de ressources associée à l'équilibre concurrentiel trouvé en (c) est-elle intéressante sur le plan normatif ? Plus précisément, est-elle efficace au sens de Pareto ? Est-elle compatible avec votre conception personnelle de la justice distributive ?

Réponse: L'allocation trouvée en (c) est efficace au sens de Pareto (1er théorème du bien être). Elle n'est peut être pas juste car elle traite assez inégalement Mutt et Jeff. Parce qu'il possède la technologie permettant de convertir du temps humain en rutabaga, Jeff peut consommer plus que Mutt en travaillant moins.

(e) Déterminer l'allocation de loisir et de rutabaga que choisirait un planificateur social utilitariste et comparer, en se référant éventuellement aux commentaires de la question (d), la réponse avec l'allocation "choisie" par le fonctionnement concurrentiel des marchés trouvée en (c).

Réponse: En supposant que les fonctions d'utilités de l'énoncé sont celles qui sont pertinentes pour effectuer les comparaisons interpersonnelles de bien être qui sont requises pour la planification sociale utilitariste, on sait que celle-ci viserait à résoudre le programme

$$\max_{x_1^M, x_2^M, x_1^J, x_2^J} U^M(x_1^M, x_2^M) + U^B(x_1^J, x_2^J) \text{ sous contrainte que}$$

$$\begin{aligned} x_2^M + x_2^J &\leq 4\sqrt[2]{2 - x_1^A - x_1^W} \text{ et que} \\ x_1^i &\in [0,1] \text{ pour } i = M, F \end{aligned}$$

Dans la mesure où les deux individus ont la même fonction d'utilité et la même capacité productive, on voit immédiatement que la solution à ce programme est symmétrique et préconisera $x_1^M = x_1^J = x_1$ et $x_2^J = x_2^M = x_2$. Remarquant cela, et compte tenu du fait que la contrainte de réalisabilité technique de l'allocation sera satisfaite à égalité à la solution de ce programme, on peut encore écrire (en omettant la contrainte $x_1^i \in [0,1]$ pour $i = J, M$)

$$\max_{x_1} x_1(1 - x_1)^{\frac{1}{2}}$$

un programme dont la condition de premier ordre est:

$$\begin{aligned} (1 - x_1^*)^{\frac{1}{2}} - \frac{x_1^*}{2(1 - x_1^*)^{\frac{1}{2}}} &= 0 \Leftrightarrow \\ (1 - x_1^*) &= \frac{1}{2}x_1^* \Leftrightarrow \\ x_1^* &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

l'utilitarisme requiert donc que chaque agent consomme $2/3$ unités de loisir, ce qui laisse $\frac{2}{3}$ unités de temps total disponible pour la production. En divisant par deux la production de $4(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}}$ unités de rutabaga ainsi obtenue, on en déduit que chaque agent consomme $2(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}}$ unités de rutabaga.

(d) Pouvez-vous trouver une paire d'impôts et de transferts forfaitaires qui équilibreraient le budget de l'Etat tout en permettant à l'économie d'aboutir à l'allocation des ressources calculée en (c) comme résultat d'un équilibre général concurrentiel des marchés ? Si non, dire pourquoi. Si oui, trouver ces transferts, déterminer le salaire horaire qui s'établira alors et commenter sa réponse.

Réponse: Oui on le peut, car les conditions du second théorème du bien être sont réunies ici. Nous cherchons donc des nombres $\widehat{p}_1 > 0$ et T (transfert forfaitaire net versé par Jeff à Mutt) tels que

$$\frac{1}{2} + \frac{T}{2\widehat{p}_1} = \frac{2}{3} \tag{10}$$

et que

$$\frac{\widehat{p}_1 + T}{2} = 2\sqrt[2]{\frac{2}{3}} \tag{11}$$

A partir de (11), on tire

$$\widehat{p}_1 = 4\sqrt[2]{\frac{2}{3}} - T$$

ce qui, substitué dans (10) donne

$$\frac{T}{4\sqrt[2]{\frac{2}{3}} - T} = \frac{1}{6}$$

ou

$$\begin{aligned} T &= \frac{2}{3}\sqrt[2]{\frac{2}{3}} - \frac{T}{6} \Leftrightarrow \\ T &= \frac{4}{7}\sqrt[2]{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

et donc

$$\widehat{p}_1 = \frac{24}{7}\sqrt[2]{\frac{2}{3}}$$

Exercice 17: On considère une communauté constituée d'un nombre impair n d'individus. Tous ces individus ont les mêmes préférences pour les combinaisons de bien public et de biens privé auxquels ils peuvent avoir accès. En notant Z la quantité de bien public et x la quantité de bien privé, les préférences d'un individu de cette communauté sont représentées par la fonction d'utilité $U : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$U(Z, x) = \ln Z + \ln(1 + x)$$

Les individus diffèrent par leur richesse en bien privé. On note ω_i la richesse de l'individu $i \in \{1, ..., n\}$. Pour toute spécification $(\omega_1, ..., \omega_n)$ de ces niveaux de richesse privée, la communauté doit décider collectivement d'un niveau de production de bien public et d'un financement de cette production au moyen d'un taux unique de taxation $t \in [0, 1]$ de la richesse privée. Si une taxe d'un taux t est choisie par la communauté, l'individu de catégorie i obtiendra la combinaison de bien public et de bien privé $((1-t)\omega_i, t(\sum_{j=1}^{n} \omega_j))$.

(a) Donner un exemple d'une fonction de décision collective qui, à chaque configuration de richesse privée $(\omega_1, ..., \omega_n)$, associe un classement complet et transitif de l'ensemble $[0, 1]$ des taux de taxe possibles qui satisfait les hypothèses d'Arrow suivantes: Non-dictature, Principe de Pareto, Indépendance par rapport aux alternatives non-pertinentes et qui ne repose que sur une mesurabilité ordinale et non-comparable du bien être individuel. Vous devrez montrer par des arguments heuristiques que votre fonction de décision collective satisfait les trois hypothèses sus-mentionnées dont vous donnerez un énoncé précis. Vous devrez également montrer que cette fonction de décision collective n'utilise qu'une information ordinale et interpersonnellement non-comparable sur les préférences individuelles.

Réponse: Définissons la fonction $\Phi^i : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par

$$\Phi^i(t) = \ln(t(\sum_{j=1}^{n} \omega_j)) + \ln(\omega_i(1-t) + 1)$$

à tout $\bar{t} \in]0, 1]$,

$$\Phi^{i\prime}(\bar{t}) = \frac{1}{\bar{t}} - \frac{\omega_i}{\omega_i(1-\bar{t}) + 1}$$

Cette dérivée est positive si $\bar{t}$ est proche de 0, et devient nulle sur $[0, 1]$ si $\omega_i > 1$ (elle reste toujours positive dans le cas contraire). On remarque également que la dérivée seconde

$$\Phi^{i\prime\prime}(\bar{t}) = -\frac{1}{\bar{t}^2} - \frac{\omega_i^2}{(\omega_i(1-\bar{t}) + 1)^2} \leq 0$$

est partout négative sur son domaine. Par conséquent, la fonction Φ^i est concave, admet un maximum global unique sur son domaine. Elle représente donc une préférence unimodale. Lorsque les individus ont des préférences unimodales, on sait que la règle majoritaire est transitive. La fonction de décision collective définie par la règle majoritaire sert donc de réponse à la question a).

(b) Trouver le taux de taxe que choisirait une communauté de 5 individus de richesses $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 3$ $\omega_4 = 6$ et $\omega_5 = 10$ qui prendrait ses décision en utilisant la fonction de décision collective proposée en (a).

Réponse: Ok! Il faut trouver le taux de taxe préféré d'un agent de richesse

ω_i. Ce taux de taxe préféré t_i^*, s'il est à l'intérieur de $[0,1]$ vérifie

$$\begin{aligned}
\Phi^{i\prime}(t_i^*) &= \frac{1}{t_i^*} - \frac{\omega_i}{\omega_i(1-t_i^*)+1} = 0 \\
\omega_i(1-t_i^*)+1 &= t_i^*\omega_i \\
t_i^* &= \frac{1+\omega_i}{2\omega_i}
\end{aligned}$$

Le taux de taxe de l'électeur médian (qui sera le taux de taxe préféré à tout autre par une majorité d'électeurs) est donc $2/3$.

Exercice 18) Imaginez une communauté de n individus, chacun ayant des préférences monotones vis-à-vis d'un seul bien. Dans une telle économie, l'ensemble des allocations possibles consiste en toutes les façons de distribuer une quantité agrégée de ce bien entre les n individus.

Montrez que pour une telle communauté à 1 bien, les critères de Kaldor-Hicks-Scitovsky et de Chipman-Moore-Samuelson, dont vous donnerez la définition précise, vont donner lieu exactement au même classement des diverses positions que peut atteindre cette économie.

Solution Note: je n'ai pas défini rigoureusement le critère de Scitovsky et je n'ai parlé que du critère de Kaldor-Hicks-Scitovsky. Par rapport à ce que nous avons vu en classe, le critère de Scitovsky n'est rien d'autre que le facteur asymmétrique de K (en clair, $K_a = S$ dans la démonstration qui suit.

Supposons deux positions (x,X) (x',X') telles que (x,X) K (x',X'). Par définition de K, ceci implique que : $\exists$ $z \in X$ t. q. $z\ R_i\ x'$ $\forall$ $i = 1,...,n$ et z P_j x' pour au moins un individu j. Puisque $z\ R_i$ x' pour i et qu'un seul bien est consommé, il faut bien que la quantité de ce bien consommé par i dans l'état z ne soit pas plus petite que celle consommée dans l'état x' (puisque les préférences de i sont monotones i.e. l'individu préfère avoir plus du bien que moins). Donc $\forall$ $i = 1,...,n$ $z_i \geq x_i'$ où z_i est la quantité du bien consommé par i dans z .
Donc $\Sigma^n_{i=1} z_i \geq \Sigma^n_{i=1} x_i'$ puisque x' est Pareto optimal dans X', toutes les quantités du bien doivent être utilisées (autrement on pourrait toujours améliorer le bien être d'au moins un individu sans réduire celui des autres avec le résidu non utilisé du bien)
Mais alors $\Sigma^n_{i=1} z_i \geq \Sigma^n_{i=1} x_i'$ implique que la quantité totale du bien à répartir en X est au moins aussi grande qu'en X'.
En outre puisque z P_j x' pour j $z_j > x_j'$ donc $\Sigma^n_{i=1} z_i > \Sigma^n_{i=1} x_i'$
Donc la quantité totale du bien à répartir en X est strictement plus grande qu'en X'.

Montrons maintenant que cet état de fait implique que (x',X') K (x,X) est faux.
Pour le montrer, supposons, par l'absurde, que (x',X') K (x,X) soit vrai. Alors $\exists$ z' t.q $z'\ R_i\ x$ $\forall$ i et $z_{k'}$ P_k x_k pour au moins un individu k. Mais alors, suivant le même raisonnement que précédemment, une telle situation supposerait qu'il y a plus de biens à se répartir en X' qu'en X, une contradiction. Donc (x',X') K (x,X) ne peut pas être vrai si (x,X) K (x',X') est vrai. Donc, (x,X) K $(x',X') \Rightarrow (x,X)$ K_a (x',X'). Puisque, trivialement, (x,X) K_a $(x',X') \Rightarrow (x,X)$ K (x',X'), on a donc (x,X) K $(x',X') \Leftrightarrow (x,X)$ K_a (x',X') et (x,X) K_a $(x',X') \leftrightarrow (x,X)$ S (x',X')
Donc (x,X) K $(x',X') \Leftrightarrow (x,X)$ S (x',X').

Montrons maintenant que
(x,X) S (x',X') $\rightarrow$ (x,X) CMS (x',X')
On vient de voir que le montant du bien à se partager est plus élevé dans X que dans X'. Considérons n'importe quel état x' dans X'. Puisque il y a plus de bien à se répartir dans X que dans X' et que les préférences des individus sont monotones croissantes, il est évident que je peux trouver un^,x dans X que tout le monde préfère à x'. Donc (x,X) CMS (x',X').

Montrons finalement que (x,X) CMS (x',X') $\rightarrow$ (x,X) S (x',X')
Pour démontrer cette implication, supposons (x,X) CMS (x',X'). Par définition $\forall$^,x ' $\in$ X', $\exists$^,x $\in$ X t.q^,x P^,x ' (où P est la relation de Pareto). Puisque cette affirmation est vraie $\forall$ ^,x ' $\in$ X', elle est vraie en particulier pour ^,x ' = x'. Donc $\exists$ x^ $\in$ X t.q ^,x P x. Donc (x,X) K (x',X'). Puisque (x,X) K (x',X') $\rightarrow$ (x,X) S (x',X') on a que (x,X) CMS (x',X') $\rightarrow$ (x,X) S (x',X')

Exercice 19) Deux individus, Paul et Jeanne, ne consomment que du vin et du camembert. Leurs dotations initiales sont données par :

$\omega^P = (1, 0)$

$\omega^J = (0, 1)$ où ω_1^i et ω_2^i désignent, respectivement, les quantités de vin et de camembert initialement détenues par l'individu i $(i = J, P)$

Les préférences des deux individus pour les différentes quantités de vin et de camembert qu'ils peuvent consommer sont données par

$$U^P(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

pour Paul

et par

$$U^J(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

pour Jeanne

a) Trouver une allocation qui soit à la fois Pareto optimale et équitable dans cette économie et représenter cette allocation dans un diagramme en boîte d'Edgeworth.

b) Trouver deux allocations x et y telles que x soit équitable et que y ne soit pas équitable mais soit néanmoins Pareto supérieure à x.