Maîtrise d'économétrie, Université de la Méditerranée, Microéconomie, TD 3, solutions pour le chargé de t.d.

Le 20 novembre 2002

Question 1 Woo young et Antonella consomment du rutabaga et du temps de loisir. La technologie qui permet de convertir le temps en rutabaga est possédée par Woo Young et est décrite par la fonction de production

$$y = x^{\frac{1}{2}}$$

où y désigne le nombre d'unités de rutabaga produites et x la quantité de temps utilisée dans cette production. Antonella et Woo Young disposent chacun d'1 unité de temps disponible qu'ils peuvent allouer à leur loisir ou au travail de production de rutabaga. Aucune quantité de rutabaga n'est initialement disponible. Les préférences d'Antonella et de Woo Young pour le loisir (le bien 1) et le rutabaga (le bien 2) sont représentées, respectivement, par les fonctions d'utilité suivantes

$$U^A(x_1^A, x_2^A) = x_1^A x_2^A$$

et

$$U^W(x_1^W, x_2^W) = x_1^W x_2^W$$

où x_j^i (pour $i = A, W$, $j = 1, 2$) désigne la quantité de bien j consommée par l'individu i.

(a) En prenant le rutabaga comme numéraire, déterminer le salaire réel, les quantités de loisir (ou les quantités de travail), et les quantités de rutabaga allouées à Antonella et à Woo Young à l'équilibre général concurrentiel de l'économie

Réponse:

Déterminons d'abord la fonction de profit $\pi(p_1)$ (en posant $p_2 = 1$ car le rutabaga est le numéraire de cette économie)

$$\pi(p_1) = \max_{x_1} x_1^{\frac{1}{2}} - p_1 x_1$$

La condition de 1er ordre nécessaire à une solution intérieure x_1^* à ce programme nous donne

$$x_1^* = \frac{1}{4p_1^2}$$

et donc

$$\pi(p_1) = x_1^{*\frac{1}{2}} - p_1 x_1^* = \frac{1}{2p_1} - \frac{1}{4p_1} = \frac{1}{4p_1}$$

Les fonctions de demandes Marshalliennes de bien j ($j = 1, 2$) pour un individu doté de richesse R (obtenues comme solution de la maximisation d'utilité sous contrainte budgétaire) sont

$$x_j^M(p_1, p_2, R) = \frac{R}{2p_j}$$

Nous savons en outre que $R_A = p_1$ et que $R_W = p_1 + \pi(p_1) = p_1 + \frac{1}{4p_1}$. On a donc une demande de loisir inélastique de loisir de la part d'Antonella de $\frac{1}{2}$. Pour Woo Yong, la demande de loisir est de

$$x_1^M(p_1, p_2, R) = \frac{p_1 + \frac{1}{4p_1}}{2p_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8p_1^2}$$

si $\frac{1}{2} + \frac{1}{8p_1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{8p_1^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow p_1 \geq \frac{1}{2}$ et de $x_1^M(p_1, p_2, R) = 1$ autrement. Woo Yong ne travaillera donc que si le salaire horaire net est supérieur à 1/2. On détermine le salaire horaire d'équilibre en apurant le marché du travail. Pour faire cet apurement, il faut tenir compte du comportement d'offre de travail de Woo Yong. Supposons d'abord que Woo Yong ne travaille pas. L'équilibre du marché du travail requiert que la quantité demandée de travail soit égale à la quantité offerte, soit

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4p_1^2} \Leftrightarrow p_1 = \sqrt[2]{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}$$

donc le salaire qui apure le marché du travail sous l'hypothèse où Woo Yong ne travaille pas est incompatible avec cette hypothèse. Il faut donc supposer que Woo Yong travaille, dans un quel cas, l'équilibre du marché du travail est décrit par l'équation

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8p_1^2} = \frac{1}{4p_1^2} \Leftrightarrow \frac{3}{8p_1^2} = 1 \Leftrightarrow p_1^* = \frac{1}{2}(\frac{3}{2})^{\frac{1}{2}}$$

avec ce salaire, la consommation de loisir de Woo Yong est de $\frac{1}{2} + \frac{1}{8\frac{1}{4}\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$. La consommation de loisir d'Antonella est évidemment de 1/2 alors que sa consommation de rutabaga est de $\frac{1}{2}p_1^* = \frac{1}{4}(\frac{3}{2})^{\frac{1}{2}}$. Dans la mesure où $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ unités de travail sont effectuées au total dans l'économie et que, par conséquent, $\sqrt[2]{\frac{2}{3}}$ unités de rutaba sont produites, on en déduit que Woo Yong consommera

$$\sqrt[2]{\frac{2}{3}} - \frac{1}{4}(\frac{3}{2})^{\frac{1}{2}} = (\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}(\frac{2}{3})^{\frac{-1}{2}} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{(\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}}} = \frac{5/12}{\sqrt[2]{2/3}}$$

unités de rutabaga. On a donc comme allocation d'équilibre général

$$(x_1^{A*}, x_2^{A*}, x_1^{W*}, x_2^{W*}) = (1/2, \frac{1/4}{\sqrt[2]{2/3}}, 5/6, \frac{5/12}{\sqrt[2]{2/3}}$$

(b) L'allocation de ressources associée à l'équilibre concurrentiel trouvé en (a) est-elle intéressante sur le plan normatif ? Plus précisément, est-elle efficace au sens de Pareto ? Est-elle compatible avec votre conception personnelle de la justice distributive ? Argumenter soigneusement la réponse à chacune de ces questions.

Réponse: Comme résultat d'un équilibre général concurrentiel sans effets externes, biens publics et autres défaillances de marché, l'allocation trouvée en b) est évidemment efficace au sens de Pareto (1er théorème fondamental du bien être). On peut toutefois trouver injuste cette allocation qui conduit les deux individus à obtenir des niveaux d'utilités très différents alors qu'ils sont dotés des mêmes préférences. D'un point de vue éthique, cette différence de niveaux de satisfaction, dans la mesure où on accepte de comparer ceux-ci, peut donc paraître moralement arbitraire. Elle résulte, de fait, de la répartition arbitraire des dotations initiales qui attribue la rente que retire le propriétaire de la techologie au seul Woo Yong.

(c) Déterminer l'allocation de loisir et de rutabaga que choisirait un planificateur social utilitariste et comparer, en se référant éventuellement aux commentaires de la question (b), la réponse avec l'allocation "choisie" par le fonctionnement concurrentiel des marchés trouvée en (c).

Réponse: En supposant que les fonctions d'utilités de l'énoncé sont celles qui sont pertinentes pour effectuer les comparaisons interpersonnelles de bien être qui sont requises pour la planification sociale utilitariste, on sait que celle-ci viserait à résoudre le programme

$$\begin{array}{rcl} & & \max_{x_1^A, x_2^A, x_1^W, x_2^W} U^A(x_1^A, x_2^A) + U^B(x_1^W, x_2^W) \text{ sous contrainte que} \\ x_2^A + x_2^W & \leq & \sqrt[2]{2 - x_1^A - x_1^W} \text{ et que} \\ x_1^i & \in & [0,1] \text{ pour } i = A, W \end{array}$$

Dans la mesure où les deux individus ont la même fonction d'utilité et la même capacité productive, on voit immédiatement que la solution à ce programme est symmétrique et préconisera $x_1^A = x_1^W = x_1$ et $x_2^A = x_2^W = x_2$. Remarquant cela, et compte tenu du fait que la contrainte de réalisabilité technique de l'allocation sera satisfaite à égalité à la solution de ce programme, on peut encore écrire (en omettant la contrainte $x_1^i \in [0,1]$ pour $i = A, W$)

$$\max_{x_1} x_1 \sqrt[2]{\frac{(1 - x_1)}{2}}$$

un programme dont la condition de premier ordre est:

$$\begin{array}{rcl} [\frac{(1 - x_1)}{2}]^{\frac{1}{2}} - \frac{x_1(1 - x_1)^{\frac{-1}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} & = & 0 \Leftrightarrow \\ 2^{\frac{1}{2}}(1 - x_1) - x_1 & = & 0 \Leftrightarrow \\ x_1 & = & \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} + 1} \end{array}$$

l'utilitarisme requiert donc que chaque agent consomme $\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}+1}$ unités de loisir, ce qui laisse $\frac{2}{2^{\frac{1}{2}}+1}$ unités de temps total disponible pour la production. En divisant par deux la production de $(\frac{2}{2^{\frac{1}{2}}+1})^{\frac{1}{2}}$ unités de rutabaga ainsi obtenue, on en déduit que chaque agent consomme $\frac{1}{\sqrt[2]{2(2^{\frac{1}{2}}+1)}}$ unités de rutabaga.

(d) Pouvez-vous trouver une paire d'impôts et de transferts forfaitaires qui équilibreraient le budget de l'Etat tout en permettant à l'économie d'aboutir à l'allocation des ressources calculée en (c) comme résultat d'un équilibre général concurrentiel des marchés ? Si non, dire pourquoi. Si oui, trouver ces transferts, déterminer le salaire horaire qui s'établira alors et commenter sa réponse.

Réponse: Oui on le peut, car les conditions du second théorème du bien être sont réunies ici. Nous cherchons donc des nombres $\widehat{p}_1 > 0$ et T (transfert forfaitaire net versé par Woo Yong à Antonella) tels que

$$\frac{1}{2} + \frac{T}{2\widehat{p}_1} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} + 1} \tag{1}$$

et que

$$\frac{\widehat{p}_1 + T}{2} = \frac{1}{(2(2^{\frac{1}{2}} + 1))^{\frac{1}{2}}} \tag{2}$$

A partir de (2), on tire

$$\widehat{p}_1 = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{(2^{\frac{1}{2}} + 1)^{\frac{1}{2}}} - T$$

ce qui, substitué dans (1) donne

$$\frac{T}{\frac{2^{\frac{1}{2}}}{(2^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{1}{2}}}-T}=\frac{2^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{1}{2}}+1}{(2^{\frac{1}{2}}+1)}$$

ou

$$\begin{aligned}T &= \frac{2^{\frac{1}{2}}(2^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{1}{2}}+1)}{(2^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{3}{2}}}-T\frac{2^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{1}{2}}+1}{(2^{\frac{1}{2}}+1)}\Leftrightarrow\\ T &= \frac{2^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{1}{2}}+1}{2^{\frac{1}{2}}(2^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

et donc

$$\widehat{p}_1=\frac{2^{\frac{1}{2}}}{(2^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{1}{2}}}-\frac{2^{\frac{3}{2}}-2^{\frac{1}{2}}+1}{2^{\frac{1}{2}}(2^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2^{\frac{1}{2}}+1}{2^{\frac{1}{2}}(2^{\frac{1}{2}}+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Question 2) Iara et Youri sont les seuls habitants d'une économie d'échange qui opère sur le mode de la concurrence pure et parfaite. Iara a des préférences pour les cerises (dont les quantités sont désignées par x) et le cognac (dont les quantités sont notées y) décrites par la fonction d'utilité

$$U^I(x,y)=20\ln x+y$$

tandis que les préférences de Youri pour les mêmes biens sont représentées par la fonction d'utilité

$$U^Y(x,y)=xy$$

Iara est dotée initialement de 4 kilos de cerises et de 6 litres de cognac tandis que tandis qu'Youri est doté initialement de 3 kilos de cerises et de 6 litres de cognac.

a) Déterminer l'équilibre l'allocation de cerise et de cognac qui résulterait de l'équilibre général concurrentiel

Réponse: Les demandes Marshallienne de Youri (préférences Cobb-Douglas) sont

$$\begin{aligned}x^Y(p_x,p_y,R) &= \frac{R_Y}{2p_x}\text{ et}\\ y^Y(p_x,p_y,R) &= \frac{R_Y}{2p_y}\end{aligned}$$

en sachant que $R_Y=p_x\omega_x^Y+p_y\omega_y^Y=3p_x+6p_y$.

La demande Marhallienne de cerise de Iara s'obtient par la résolution du programme

$$\max_x 20\ln x+\frac{R_I}{p_y}-\frac{p_x}{p_y}x$$

d'où on tire de la condition de premier ordre:

$$x^I(p_x,p_y,R)=\frac{20p_y}{p_x}$$

(en remarquant avec soin que cette condition de premier ordre ne caractérise la demande Marshallienne de cerises de Iara que si $\frac{R_I}{p_y}-\frac{p_x}{p_y}x\geq 0\Leftrightarrow R^I\geq 20p_y$). Si $R^I<20p_y$, Iara consacrera toute sa richesse disponible à la consommation de cerise et en consommera alors R_I/p_x. La demande Marshallienne de Cognac de Iara sera, dans les deux cas de figure, donnée par $\frac{R_I - p_x x^I(p_x,p_y,R)}{p_y}$. Evidemment, $R_I = p_x\omega_x^I + p_y\omega_y^I = 4p_x + 6p_y$. Si on prend le cognac comme numéraire, on peut donc écrire les demandes Marshalliennes des deux agents comme suit: Pour Iara:

$$\begin{aligned} x^I(p_x) &= \frac{20}{p_x} \\ y^I(p_x) &= 4p_x - 14 \end{aligned} \tag{3}$$

si $p_x \geq \frac{7}{2}$ et

$$\begin{aligned} x^I(p_x) &= \frac{4p_x+6}{p_x} = 4 + \frac{6}{p_x} \\ y^I(p_x) &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

autrement. Pour Youri, on a:

$$\begin{aligned} x^Y(p_x,p_y,R) &= \frac{3p_x+6}{2p_x} = \frac{3}{2} + \frac{3}{p_x} \quad \text{et} \\ y^Y(p_x,p_y,R) &= \frac{3p_x+6}{2} = \frac{3p_x}{2} + 3 \end{aligned}$$

On détermine le prix d'équilibre en apurant l'un des deux marchés. En supposant que (3) décrit le comportement de demande de Iara, la condition d'apurement du marché des cerise est:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} + \frac{3}{p_x} + \frac{20}{p_x} &= 7 \Leftrightarrow \\ \frac{23}{p_x} &= \frac{11}{2} \Leftrightarrow \\ p_x &= \frac{46}{11} \geq \frac{7}{2} \end{aligned}$$

donc l'hypothèse suivant laquelle (3) décrit le comportement de demande de Iara est vérifié. L'allocation d'équilibre général concurrentiel est donc

$$(x^I, y^I, x^Y, y^Y) = (\frac{110}{23}, \frac{30}{11}, \frac{51}{23}, \frac{102}{11})$$

b) Supposer qu'un gouvernement bienveillant, qui n'aime pas voir Youri s'abreuver excessivement de Cognac, souhaite réaliser l'allocation $(x_I, y_I, x_Y, y_Y) = (5,4,2,8)$ et démontrer la Pareto optimalité de l'allocation.

Réponse: Les préférences des deux agents étant strictement convexes, une condition suffisante pour l'optimalité Parétienne d'une allocation quelconque dans une économie d'échange est donnée par l'égalité des taux marginaux de substitution.

$$TMS_{xy}^I(5,4) = \frac{\frac{\partial U^I(5,4)}{\partial x}}{\frac{\partial U^I(5,4)}{\partial y}} = 4 = TMS_{xy}^Y(2,8) = \frac{\frac{\partial U^I(2,8)}{\partial x}}{\frac{\partial U^I(2,8)}{\partial y}} = 4$$

c) Trouver un système d'impôts forfaitaires et un système de prix qui amèneraient naturellement Iara et Youri à consommer les quantités de cerises et de cognac jugées adéquates.

Réponse: Le prix qui supporte l'allocation Pareto efficace (en utilisant le cognac comme numéraire) doit être 4. Le transfert net T qu'il faut donner à Youri pour l'amener à choisir son allocation est donc donné par la condition

$$x^Y(4,T) = \frac{12+6+T}{8} = 2$$

d'où on tire $T = -2$. Il faut donc donner 2 unités de numéraire à Iara et les retirer à Youri. On vérifie sans difficulté (en utilisant les demandes Marshalliennes du problème précédent, qu'en étant confronté au prix de 4, et compte tenu de la richesse dont il dispose avec le transfert net (-2 pour Youri et +2 pour Iara), nos deux amis choisissent précisément les quantités décrites dans l'allocation.

Question 3) Soit une économie avec deux individus, Tarzan et Godsilla ayant à se partager 100 unités de mortadelle. Les préférences de Tarzan sont représentées par:
$U^T\ (x_T, x_G) = 2min\{x_T, x_G\} - max\{x_T, x_G\}$ et celles de Godsilla par $U^G(x_T, x_G) = x_G$
Aucun surplus ne peut être distribué de sorte que $x_T + x_G = 100$ dans toutes les allocations.
a) Trouvez l'ensemble des utilités possibles
b) Trouvez l'ensemble des allocations Pareto optimales

Réponse: Si $U^G = x_G \in [0, 50]$, $U^T(U^G) = \max_{x_T, x_G} U^T(x_T, x_G)$ sous contrainte que $U^G = x_G$ est donné par $2U_G - (100 - U_G) = 3U_G - 100$ (voir dessin). Si $U^G = x_G \in]50, 100]$, on a alors $U^T(U^G) = \max_{x_T, x_G} U^T(x_T, x_G)$ sous contrainte que $U^G = x_G$ est donné par $200 - 2U_G - U_G = 200 - 3U_G$ (voir dessin).

Question 4 Démontrer heuristiquement les énoncés suivants:
(1) Si il existe une unique combinaison de stratégies qui résulte d'une procédure d'élimination itérative de stratégies faiblement dominées, alors cette combinaison est nécessairement un équilibre de Nash.

Preuve: Par l'absurde supposons que $(x_1^*, ..., x_n^*)$ soit l'unique combinaison de stratégies d'un jeu sous forme normale à n joueurs qui ait résisté à une procédure d'élimination itérative de stratégies faiblement dominées et qu'elle ne soit pas un équilibre de Nash. Il existe donc un joueur i et une stratégie $\widehat{x}_i$ pour ce joueur tels que $U_i(\widehat{x}_i; x_{-i}^*) > U_i\ (x_i^*; x_{-i}^*)$. Mais puisque $(x_1^*, ..., x_n^*)$ est l'unique combinaison de stratégies qui ait résisté à une procédure d'élimination itérative de stratégies faiblement dominées, il faut bien que cette stratégie $\widehat{x}_i$ a été éliminée à une étape de la procédure d'élimination itérative de stratégies faiblement dominées. Cela signifie donc qu'il existe des sous-ensembles $\widetilde{S}_j$ (pour $j = 1, ..., n$) de l' ensemble de stratégies de chaque joueur, chacun contenant x_j^*, tels que $U_i(\widehat{s}_i\ ; s_{-i}) \leq U_i(s_i\ ; s_{-i})$ pour tout $s_i \in \widetilde{S}_i$ et pour tout $s_{-i} \in \times_{j \neq i} \widetilde{S}_j$. Mais cela est incompatible avec le fait que $U_i(\widehat{x}_i; x_{-i}^*) > U_i\ (x_i^*; x_{-i}^*)$.

(2) S'il existe une unique combinaison de stratégies qui résulte d'une procédure d'élimination itérative de stratégies strictement dominées (et ce à chaque étape de la procédure d'élimination), alors cette combinaison constitue l'unique équilibre de Nash du jeu.

Preuve: Par la proposition précédente nous savons que si une procédure d'élimination itérative de stratégies faiblement dominées (et en particulier donc, une procédure d'élimination itérative de stratégies strictement dominées) conduit à la sélection d'une seule combinaison de stratégie, la dite combinaison est un équilibre de Nash. Nous devons montrer maintenant que, sous l'hypothèse où la procédure élimine, à chaque étape du jeu, des stratégies strictement dominées, elle sélectionnera l'unique équilibre de Nash du jeu si elle sélectionne une unique combinaison de stratégies. Par l'absurde, supposons que $(x_1^*, ..., x_n^*)$ soit l'unique combinaison de stratégies qui ait résisté à une procédure d'élimination itérative de stratégies strictement dominées et qu'il existe une combinaison de stratégies $(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n)$ qui soit également un équilibre de Nash du jeu. Puisque $(x_1^*, ..., x_n^*)$ est l'unique combinaison de stratégies qui ait résisté à une procédure d'élimination itérative de stratégies strictement dominées, il existe une étape de la procédure d'élimination où les ensembles de stratégies restantes pour chaque joueur i étaient $\widetilde{S}_i$ (contenant évidemment x_i^*) et où, pour un joueur $h, \widehat{x}_h \in \widetilde{S}_h$. Considérons, parmi ces étapes, la plus tardive possible (à partir du début de la procédure) qui conserve, dans les ensembles $\widetilde{S}_i$, toutes les stratégies $\widehat{x}_i$ (pour $i = 1, ..., n$) qui soient distinctes de x_i^* (il existe au moins une de ces stratégies si la combinaison $(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n)$ est distincte de $(x_1^*, ..., x_n^*)$). Appelons $\widehat{x}_h$, l'une des stratégies $(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n)$ qui sera éliminée au terme de cette étape. Puisqu'elle est strictement dominée par une autre stratégie $\widetilde{x}_h$ au cours de cette étape pour h, on a que $U_h(\widetilde{x}_h; x_{-h}) > U_h(\widehat{x}_h; x_{-h})$ pour tout $x_{-h} \in \times_{k \neq h} \widetilde{S}_k$. Puisque $\widehat{x}_{-h} \in \times_{k \neq h} \widetilde{S}_k$, on a donc que $U_h(\widetilde{x}_h; \widehat{x}_{-h}) > U_h(\widehat{x}_h; \widehat{x}_{-h})$, ce qui contredit l'hypothèse suivant laquelle $(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n)$ est un équilibre de Nash.

(3) Si une combinaison de stratégies est un équilibre de Nash, alors aucune stratégies n'est strictement dominée. Montrer par un exemple que l'énoncé est faux si on remplace "strictement" par "faiblement".

Preuve: Supposons que dans une combinaison de stratégies $(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n)$, $\widehat{x}_j$ soit strictement dominée par une stratégie $\widetilde{x}_j$ pour un joueur j. On a donc $U_j(\widetilde{x}_j; x_{-j}) > U_h(\widehat{x}_j; x_{-j})$ pour toute combinaison de stratégies x_{-j} que peuvent jouer les autres joueurs et, en particulier, pour la combinaison de stratégies $\widehat{x}_{-j}$. Mais alors, on ne peut évidemment pas avoir $U_j(\widehat{x}_j; \widehat{x}_{-j}) \geq U_j(x_j; \widehat{x}_{-j})$ pour tout x_j. Il est donc exclu que $(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n)$ soit un équilibre de Nash. Comme contre exemple de la deuxième partie de la proposition, on peut considérer l'exemple suivant (où (*haut*, *gauche*) est un équilibre de Nash même si *haut* est faiblement dominée par *bas* pour le joueur 1 et *gauche* est faiblement dominée par *droite* pour le joueur 2.

		joueur 2	
		gauche	droite
joueur 1	haut	2,3	1,3
	bas	2,0	2,2

Question 5 On considère le jeu à deux joueurs sous forme normale suivant

		joueur 2		
		gauche	milieu	droite
joueur 1	haut	4,3	2,7	0,4
	centre	5,5	5,-1	-4,-2
	bas	3,3	1,1	-1,7

(a) Que choisira de faire chacun des joueurs ? Sur quel concept de solution est basée votre réponse

Réponse: En décidant de choisir au hasard entre "haut" et "centre", le joueur 1, pourvu qu'il joue "haut" avec une probabilité au moins aussi élevé que 3/4, est sur d'avoir un meilleur paiement que celui qu'il obtiendrait en choisissant "bas", et ce quoi que fasse le joueur 2. Si on élimine "bas" de l'ensemble de stratégies du joueur 1, on constate, de la même manière, que la stratégie "droite" du joueur 2 est dominée strictement par une mixture aléatoire de "gauche" et "milieu" (la mixture en question devant choisir "gauche" avec probabilité strictement comprise entre 1/6 et 3/4). Ayant ainsi éliminé "droite" et "bas", on constate que la stratégie "haut" du joueur 1 est dominée par la stratégie restante "centre" et que, dans le jeu "trivial" obtenu en contraignant le joueur 1 à jouer "centre", la stratégie "milieu" de 2 est dominée par "gauche". La procédure d'élimination itérative des stratégies strictement dominées (élargies aux stratégies mixtes ici) nous a permis de sélectionner la combinaison de stratégies $(centre, gauche)$

(b) Même question avec le jeu légèrement modifié suivant:

		joueur 2		
		gauche	milieu	droite
joueur 1	haut	2,6	2,5	0,4
	centre	5,5	5,-1	-4,-2
	bas	3,3	3,1	-1,7

Réponse: On peut éliminer la stratégie milieu du joueur 2 qui est dominée strictement par gauche. On ne peut par contre pas éliminer de stratégies du joueur 1 par argument d'élimination itérative de stratégies faiblement ou strictement dominées (même étendu aux stratégies mixtes). On peut donc sélectionner "centre, gauche" en disant que, dans le jeu obtenu après élimination de la stratégie "milieu" du joueur 2, cette combinaison est l'unique équilibre de Nash du jeu.

Question 6 Deux entreprises sont en concurrence pour la production d'un bien unique. L'entreprise 1 a une fonction de coûts $C_1(q_1) = 5q_1 + q_1^2$ tandis que l'entreprise 2 a une fonction de coûts $C_2(q_2) = q_2 + 4q_2^2$. La fonction de demande pour le bien produit par ces deux firmes est $Q = 150 - 2p$ où p est le prix. Trouver les quantités produites, le prix demandé et les profits réalisés par chacune des deux firmes en supposant que les firmes choisissent l'unique combinaison de quantités produites qui passe le test de l'élimination itérative de stratégies dominées. Faire un graphique pour illustrer le raisonnement.

Réponse: On détermine d'abord, pour chaque firme, la meilleure réponse à la stratégie de l'adversaire en remarquant que, si une stratégie admissible d'un joueur n'est la meilleure réponse à aucune stratégie de son adversaire, une telle stratégie est strictement dominée. On trouve la fonction de meilleure réponse d'une entreprise en résolvant le programme suivant (pour une firme i en fonction du niveau de production de son concurrent j):

$$\max_{q_i}(75 - \frac{(q_1 + q_2)}{2})q_i - C_i(q_i)$$

qui nous donne (en utilisant les habituelles conditions de premier ordre).

$$\begin{aligned} q_1 &= r_1(q_2) = \frac{70}{3} - \frac{q_2}{6} \Leftrightarrow \\ r_1^{-1}(q_1) &= 140 - 6q_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} q_2 &= r_2(q_1) = \frac{74}{9} - \frac{q_1}{18} \Leftrightarrow \\ r_2^{-1}(q_2) &= 148 - 18q_2 \end{aligned}$$

On remarque que l'intervalle de stratégies envisageables pour chaque joueur est $[0, 75]$ (produire plus que 75 pour chaque joueur entrainerait un prix négatif). Par ailleurs, en analysant $r_1(.)$, on remarque que l'intervalle des meilleures réponses à des choix envisageables par le joueur 2 est donnée par l'intervalle $[\frac{140-75}{6}, \frac{70}{3}] = [\frac{65}{6}, \frac{70}{3}]$. N'importe quelle stratégie envisageable du joueur 1 contenue dans les intervalles $[0, \frac{65}{6}[$ et $]\frac{70}{3}, 75]$ est donc strictement dominée par au moins une stratégie de l'intervalle $[\frac{65}{6}, \frac{70}{3}]$. En restreignant l'ensemble des stratégies envisageables du joueur 1 à l'intervalle $[\frac{65}{6}, \frac{70}{3}]$, on remarque, en examinant $r_2(q_1)$, que l'ensemble des meilleures réponses de 2 aux choix envisageables restants de 1 est donnée par $[\frac{74}{9} - \frac{70}{54}, \frac{74}{9} - \frac{65}{108}] = [\frac{374}{54}, \frac{823}{108}] = [\frac{187}{27}, \frac{823}{108}]$. On en est donc conduit à la conclusion que toutes les stratégies envisageables de 2 qui n'appartiennent pas à $[\frac{187}{27}, \frac{823}{108}]$ peuvent être éliminées. En restreignant le choix des stratégies envisageables de 2 à l'intervalle $[\frac{187}{27}, \frac{823}{108}]$, on en est conduit à éliminer, parmi les stratégies de 1 appartenant à $[\frac{65}{6}, \frac{70}{3}]$, celles qui ne sont pas des meilleures réponses aux stratégies envisageables de 2 contenues dans $[\frac{187}{27}, \frac{823}{108}]$. En continuant la procédure de cette manière, on en est conduit à sélectionner la paire de stratégies q_1^*, q_2^* définie par

$$q_2^* = \frac{74}{9} - \frac{q_1^*}{18}$$

et

$$q_1^* = \frac{70}{3} - \frac{q_2^*}{6}$$

soit

$$q_1^* = \frac{6766}{321}$$

et

$$q_2^* = \frac{748}{107}$$

(Faire un dessin).

Question 7 Deux adolescents masculins s'amusent à jouer à la “poule mouillée” en roulant à 100kms/heure en sens inverse sur une route étroites des Alpes du Sud. Chacun a le choix entre deux stratégies: foncer ou se ranger sur une aire de stationnement. Le premier adolescent qui se range sur l'aire alors que l'autre fonce en sens inverse passe pour une poule mouillée tandis que l'autre passe pour un homme viril. Si les deux adolescents choisissent de se ranger en même temps, aucun des deux ne passe pour une poule mouillé mais aucun ne passe pour un homme viril. Si aucun des deux ne choisit de se ranger, tous les deux périssent dans la violente collision qui s'en suivra.

(a) Représenter le problème de décision auquel sont confrontés les adolescents sous la forme d'un jeu sous forme normale

(b) Déterminer tous les équilibre de Nash en stratégies pures et en stratégies mixtes de ce jeu. Quelle est la probabilité que les deux adolescents restent en vie ?

Réponse: exemple:

	Foncer	Se ranger
Foncer	-1000,-1000	+1,-1
Se ranger	-1,+1	0,0

Il n'y a évidemment pas d'équilibre de Nash en stratégies pures. Pour obtenir un équilibre en stratégies mixtes, on doit chercher une distribution de probabilités sur les stratégies d'un joueur (disons le joueur 1) qui rende l'autre joueur indifférent entre ses stratégies mixtes. Cette distribution de probabilité est, ici, caractérisée par la probabilité p de foncer définie par:

$$-1000p + 1 - p = -p \Leftrightarrow p = \frac{1}{1000}$$

La probabilité de collision frontale à cet équilibre de Nash est donc de $\frac{1}{1000\,000}$, ce qui signifie qu'il y a 999999 chances sur un millions que les deux adolescents restent en vie

Question 8 On considère le jeu sous forme normale à trois joueurs suivant (le joueur 1 choisit une ligne, le joueur 2 choisit une colonne et le joueur 3 choisit une matrice)

A

	gauche	**droite**
haut	1,2,0	2,1,1
bas	0,1,3	1,0,4

B

	gauche	**droite**
haut	1,1,2	2,3,4
bas	0,0,0	1,2,2

C

	gauche	**droite**
haut	1,0,1	5,1,2
bas	10,6,1	8,4,3

Faire une prédiction de l'issue du jeu et indiquer le concept de solution utilisé.

Réponse: La matrice C est faiblement dominée, pour le joueur 3, par une mixture 1/2 1/2 de A et B . Si 3 ne joue pas la matrice C, la stratégie *bas* du joueur 1 est strictement dominée par la stratégie *haut*. Si le joueur 1 joue*haut*, la stratégie *droite* du joueur 3 domine strictement la stratégie *gauche*. Finalement, confronté aux cases *haut*, *droite* des matrices A et B, le joueur 3 choisira la matrice B. On aura donc, comme unique résultat d'une procédure d'élimination des stratégies dominées, la combinaison $(haut, droite, B)$ qui sera sélectionnée.

Question 9. Archibald, Irma et Nestor veulent faire un cadeau à leur camarade Bianca qui part en congé de maternité. Ils doivent mettre une somme d'argent dans une enveloppe scellée et donner cette enveloppe à leur secrétaire qui se chargera d'acheter le cadeau. Archibald, Irma et Nestor disposent, respectivement, d'un montant maximal de 100, 200 et 300 euros à consacrer à ce cadeau. Les préférences d'Archibald, Irma et Nestor pour le bien privé (dont la quantité est désignée par x) et la valeur du cadeau donné à Bianca (désignée par Z) sont représentées, respectivement, par les fonctions d'utilité $U_A(.)$, $U_I(.)$ et $U_N(.)$ suivantes

$$U_A(x, Z) = x^{\frac{1}{2}} Z^{\frac{1}{2}} = U_I(x, Z)$$

et

$$U_N = 2Z^{\frac{1}{2}} + x$$

(a) Quelle contribution au cadeau de Bianca choisiront de faire Archibald, Irma et Nestor à l'équilibre de Nash ?

(b) Montrer que les contributions choisies ne sont pas efficaces au sens de Pareto.

Question 10 Une nation organisée de manière démocratique comprend 20 millions d'électeurs. Un électeur ne s'intéresse qu'à deux choses: le montant Z des dépenses publiques que choisit le gouvernement et le montant c de sa consommation privée. Chaque électeur i ($i = 1, ..., 20\,000\,000$) dispose d'une richesse monétaire de ω_i. Les préférences de l'électeur i pour les dépenses publiques et la consommation privée sont représentées par la fonction d'utilité $U_i : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$U_i(Z, c) = \alpha_i \ln Z + (1 - \alpha_i) \ln c$$

où $\alpha_i \in]0, 1[$. Les 20 millions d'électeurs se répartissent également entre 5 groupes, définis par la valeur du paramètre α_i, suivant le schéma suivant: $\alpha_i = 1/6$ (1er groupe), $\alpha_i = 1/5$ (2ème groupe), $\alpha_i = 1/4$ (3ème groupe), $\alpha_i = 1/3$ (4ème groupe), $\alpha_i = 1/2$ (5ème groupe). La constitution de cette nation stipule que la dépense publique doit être financée par un impôt sur la richesse privé à taux constant $t \in [0,1]$ et interdit les déficits ou les excédents publics. Si Z euros de dépenses publiques sont effectués, on doit donc avoir

$$t \sum_{i=1}^{20000000} \omega_i = Z$$

Le taux d'impôt (et donc le montant de la dépense publique) est choisi par un gouvernement élu de manière démocratique. Deux partis politiques s'affrontent au cours des élections: La gauche et la droite. Chaque parti propose aux électeurs un "programme politique" qui, dans ce monde très simple, prend la forme d'un taux d'impôt. Un parti politique ne vise qu'une seule chose: gagner l'élection, ce qu'il fait en proposant un programme qui recueille l'assentiment d'une majorité de citoyens. On représente cet objectif en supposant que le paiement de n'importe lequel des deux partis est 1 si il gagne l'élection et -1 s'il la perd. Tous les citoyens se rendent voter aux élections.

(a) Quels taux d'impôts proposeront les deux partis à leurs électeurs à l'équilibre de Nash de ce jeu électoral ? L'offre de programmes vous paraît-t-elle diversifiée ?

Question 11 La maison Christies de Londre veut vendre la première paire d'escarpins de Madona aux enchères. Il existe n acheteuses potentielles pour cette paire d'escarpins. On désigne par $U_i^1(x)$ et $U_i^0(x)$ le niveau de satisfaction retirée par madame i de x euros de richesses lorsqu'elle est possession des escarpins et lorsqu'elle n'est pas en possession des escarpins respectivement. On suppose évidemment que $U_i^1(x) \geq U_i^0(x)$ pour tout x et que $U_i^j(.)$ est une fonction strictement croissante. Le montant maximal qu'est disposée à payer l'acheteuse i $(i = 1, ..., n)$ est v_i. Ce montant v_i est rigoureusement défini par l'identité

$$U_i^1(\omega_i - v_i) \equiv U_i^0(\omega_i)$$

où ω_i désigne la richesse de madame i. La maison Christies de Londre hésite entre deux modes de mise aux enchères sous pli scellé. Dans chacun des deux modes, chaque acheteuse potentielle doit mettre dans une enveloppe à son nom le montant maximal qu'elle est disposée à payer pour la paire d'escarpins. Puis les enveloppes sont ouvertes par le commissaire priseur et la paire d'escarpins est, dans les deux cas, donnée à la personne qui a mis sous enveloppe le montant le plus élevé (si il y a plusieurs personnes a avoir mis sous enveloppe le montant le plus élevé, on tire au hasard parmi elles (suivant une distribution uniforme) celle qui se verra accorder la paires d'escarpins). Par contre les deux modes d'enchères diffèrent par le prix que paie le vainqueur. Dans le premier mode (dite enchères de premier prix), le gagnant paie le montant qu'il a inscrit dans l'enveloppe. Dans le second mode (dite enchères de second prix), le gagnant paie le montant le plus élevé déposé dans l'enveloppe parmi toutes les autres enchérisseuses (si il y a plusieurs vainqueurs, ce montant sera le même que celui mis dans l'enveloppe par n'importe lequel des vainqueurs).

(a) Montrer que dans l'enchère au second prix, mettre dans l'enveloppe sa véritable disposition à payer est, pour chaque enchérisseuse, une stratégie faiblement dominante.

(b) Montrer que, dans l'enchère au premier prix, il n'y a pas de stratégie faiblement dominante. Supposons qu'une enchérisseuse puisse connaître ce qu'ont mis dans leur enveloppe les autres. Dans quels cas pourrait-telle avoir intérêt à mentir sur sa disposition à payer ?

Question 12) Deux fabricants de jouets A et B envisagent de lancer sur le marché pour la prochaine période de Noël un nouveau jeu vidéo. L'état du marché des jeux vidéo est très incertain. Le marché sera soit *bon* permettant des ventes totales de 20 millions d'unités, ou *mauvais*, avec des ventes de 6 millions d'unités. L'entreprise B, qui possède un excellent service de prévisions économiques, connait l'état du marché. L'entreprise A ne le connaît pas. Elle estime a 60% les chances pour que le marché soit mauvais. La décision de lancer le nouveau jeu entraine un coût fixe de 60 millions d'euros pour l'entreprise B et de 40 millions d'euros pour l'entreprise A. En plus de ces coûts fixes de recherche, le coût moyen de produire un jeu supplémentaire est de 5 euro pour l'entreprise A et de 3 euros pour l'entreprise B. Le prix auquel chaque entreprise pourra vendre son jeu dépend de la concurrence en vigueur sur le marché. Si les deux entreprises décident de mettre sur le marché leur jeu, elle ne pourront en obtenir que 10 euros par unité. Si une seule entreprise décide de mettre en marché son jeu, elle pourra obtenir 12 euros par unité. Si les deux entreprises mettent en marché leur jeu, elles se partageront à part égale le marché, suivant l'état de celui-ci (bon ou mauvais).

(a) Représenter le problème de décision auquel sont confrontés les directions des deux entreprises sous une forme extensive et sous une forme normale. Indiquer toutes les formes extensives possibles qui sont susceptibles de représenter ce jeu. Que décidera de faire chaque entreprise ?

(b) Compliquons énormément le problème en supposant maintenant que chacune des deux entreprises peut décider ou non, avant de prendre sa décision de lancer son produit, de faire une étude de marché. Cette étude de marché révélera avec certitude l'état du marché à l'entreprise qui aura décidé de la faire. L'étude de marché coûte 5 millions d'euros. Refaire (a) dans ce cas (en ne représentant qu'une seule des formes extensives possibles; vous trouverez cet exercice un peu "lourdingue"; mais faites le quand même!)

Question 13. Considérons le jeu suivant (appelé parfois "jeu de la vérité"). Ce jeu oppose deux joueurs, 1 et 2, et une maîtresse de jeu. La maîtresse de jeu a une pièce de monnaie truquée de manière telle que, lorsqu'elle est jetée au hasard, elle tombe sur le côté "face" 4 fois sur 5 en moyenne. Ce biais de la pièce est connu des deux joueurs. La maîtresse de jeu jette la pièce et montre le résultat au joueur 1 qui doit, ensuite, annoncer le résultat au joueur 2. Le joueur 1 n'est autorisé qu'à faire l'une des annonces suivantes: "pile" ou "face". Le joueur 2, après avoir entendu l'annonce du joueur 1, doit essayer de deviner le véritable résultat du jet. Le joueur 2 reçoit 1000 euros s'il devine correctement le résultat du jet et ne reçoit rien dans le cas contraire. Le joueur 1 reçoit 2000 euros si le joueur 2 annonce face et ne reçoit rien si le joueur 2 annonce pile. En plus de ces paiements de base, le joueur 1 reçoit une prime de 1000 euros s'il dit la vérité au joueur 2 mais ne reçoit aucune prime s'il lui ment.

(a) Représenter le jeu sous forme normale.

(b) Représenter le jeu sous forme extensive.

(c) Faire une prédiction sur l'issue plausible du jeu.