problems on production theory (Master AE2, first year)

Nicolas Gravel, Université de la Méditerranée

le 10 décembre 2009

Exercice 1: Soit $f(x_1, x_2)$ une fonction de production associée à une technologie admettant des rendements d'échelle constants. Montrer que si la productivité moyenne d'un des facteurs est croissante par rapport au niveau d'utilisation de ce facteur, le produit marginal de l'autre facteur doit être négatif.

Solution: Supposons sans perte de généralité que la productivité moyenne du facteur 1 soit croissante. Puisque la technologie admet des rendements d'échelle constants, la fonction f est homogène de degré 1, on a donc:

$$\frac{f(x_1, x_2)}{x_1} = f(1, \frac{x_2}{x_1}) = g(\frac{x_2}{x_1}) = g(z)$$

Le fait que la productivité productivité moyenne du facteur 1 soit croissannte par rapport au niveau d'utilisation de ce facteur signifie que:

$$\frac{\partial(\frac{f(x_1,x_2)}{x_1})}{\partial x_1} = -\frac{\partial g()}{\partial z}\frac{x_2}{x_1^2} > 0$$

ce qui implique évidemment que

$$\frac{\partial g()}{\partial z} = \frac{\partial f()}{\partial x_j} < 0$$

Exercice 2. Quelles conditions (le cas échéant) doivent satisfaire les nombres a et b pour que la technologie représentée par l'ensemble de production $Y = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 \leq \ln(a - y_2) - b\}$ satisfasse les conditions d'irréversibilité, d'impossibilité de production gratuite, possibilité de ne rien produire, de libre disposition des excédents et de convexité ?

Solution

(i) Une condition nécessaire et suffisante pour que la technologie soit irréversible est $a \leq 0$ ou $a > 0$ et que $\ln 2a \leq b$. Montrons que cette condition est suffisante. Si $a \leq 0$, l'expression $\ln(a - y_2)$ n'est définie que si $y_2 < a \leq 0$. Pour être techniquement possible, une activité productive (y_1, y_2) devra donc vérifier la condition $y_2 < a \leq 0$. Si tel est le cas, $(-y_1, -y_2)$ ne sera pas techniquement

possible. Si $a > 0$ et $\ln 2a \leq b$, les seules activités productives (y_1, y_2) techniquement possibles avec $y_2 > 0$ requièrent que $y_2 \in [0, a[$ et sont telles que $y_1 \leq \ln(a - y_2) - b\} < 0$. En particulier, aucune activité productive techniquement possible ne satisfait simultanément $y_1 > 0$ et $y_2 > 0$. Il n'est donc pas possible d'inverser une activité productive techniquement possible dans laquelle $y_1 \leq 0$ et $y_2 \leq 0$. Peut on inverser une activité productive techniquement possible pour laquelle $y_2 \in [0, a[$ et $y_1 \leq \ln(a - y_2) - b < 0$? La réponse est non car si $y_2 \in [0, a[$, $y_1 \leq \ln(a - (-y_2)) - b = \ln(a + y_2) - b \leq \ln 2a - b \leq 0$. Pour montrer qu'avoir $a \leq 0$ ou $a > 0$ et $\ln 2a \leq b$ est nécessaire pour l'irréversibilité de la technologie, nous devonos montrer que la violation de cette condition implique une violation de l'irréversibilité. Supposons donc que cette condition soit violée et que l'on ait $a > 0$ et $\ln 2a > b$. Considérons $y_2 \in]-a, 0[$ et choisissons y_2 aussi proche de 0 que nécessaire. L'activité $(\ln(a-y_2)-b, y_2)$ est techniquement possible et satisfait $\ln(a - y_2) - b > 0$ et $y_2 < 0$. Considérons maintenant $-y_2 \in]0, a[$. Pour y_2 proche de 0, on aura que $\ln(a - (-y_2)) - b = \ln(a + y_2)) - b > 0$. On aura donc que $-\ln(a - y_2) + b < 0 < \ln(a + y_2)) - b$ et donc, que l'activité productive $(-\ln(a - y_2) + b, -y_2)$ est techniquement possible, ce qui contredit l'irréversibilité.
(ii) La condition nécessaire et suffisante pour l'impossibilité de production gratuite est $a \leq 0$ ou $a > 0$ et $\ln a \leq b$. Cette condition est suffisante car, comme nous l'avons vu précédemment, si $a \leq 0$, une activité productive (y_1, y_2) doit, pour être techiquement possible, vérifier la condition $y_2 < a \leq 0$, ce qui exclut d'office la production gratuite. Si $a > 0$ et $\ln a \leq b$, les seules activités productives (y_1, y_2) techniquement possibles avec $y_2 > 0$ requièrent que $y_2 \in [0, a[$ et sont telles que $y_1 \leq \ln(a - y_2) - b\} < 0$. Elles excluent donc la production gratuite. Pour montrer la nécessité de la condition, supposons qu'elle soit violée et que l'on ait $a > 0$ et $\ln a > b$. Si on choisit $y_2 > 0$ aussi proche de 0 qu'on le souhaite on aura que $\ln(a - y_2) - b > 0$ et donc, que l'activité productive $(\ln(a - y_2) - b, y_2)$ est techniquement possible. Mais ceci implique de la production gratuite!

(iii) Il satisfera la possibilité de ne rien produire si $0 \leq \ln a - b \Leftrightarrow \ln a \geq b$. On remarque que cette condition ne peut jamais être vérifiée si $a < 0$.

-(iv) convexité. Cette technologie ne pourra jamais être convexe. Supposons en effet (y_1, y_2) et (z_1, z_2) tels que $y_1 = \ln(a - y_2) - b$ et $z_1 = \ln(a - y_2) - b$ avec $y_2 \neq z_2$. Nous savons que $\lambda y_1 = \lambda \ln(a - y_2) - \lambda b$ et que $(1 - \lambda) z_1 = (1-\lambda) \ln(a-z_2) - (1-\lambda) b$ pour $\lambda \in [0, 1]$. Nous savons donc que $\lambda y_1 + (1-\lambda) z_1 = \lambda \ln(a - y_2) + (1 - \lambda) \ln(a - z_2) - b$. Comme la fonction $\Phi(d) = \ln(a - d)$ est une fonction strictement convexe (sa dérivée seconde est strictement positive), elle vérifie $\Phi(\lambda d + (1 - \lambda) d') < \lambda \Phi(d) + (1 - \lambda) \Phi(d')$ pour tout d et d' distincts. Puisque y_2 et z_2 sont distinct, il s'en suit que $\lambda y_1 + (1 - \lambda) z_1 = \lambda \ln(a - y_2) + (1 - \lambda) \ln(a - z_2) - b > \ln(a - \lambda y_2 + (1 - \lambda) z_2) - b$. Cette technologie n'est donc pas convexe quelques soit les valeurs de a et b.

Exercice 3: Vrai ou faux ? Si une technologie est représentée par une fonction de production $f : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ qui est quasi-concave et qui satisfait $f(0^l) = 0$, alors cette technologie ne peut admettre de rendements d'échelle croissants. (On vous rappelle qu'une fonction de production est quasi-concave si et seulement si, pour tout niveau de production y, l'ensemble $V(y) = \{x \in \mathbb{R}^l_+ : f(x) \geq y\}$ est convexe).

Réponse: Faux. Considérons la technologie suivante (les inputs sont représentés par des nombres positifs):

$$Y = \{(y, x_1, ..., x_l) \in \mathbb{R}^{l+1}_+ \mid y \leq x_1^2 x_2^2 ... x_n^2\}$$

Un ensemble $V(y)$ associé à cette technologie est défini par:

$$V(y) = \{(x_1, ..., x_l) \in \mathbb{R}^l_+ \mid y \leq x_1^2 x_2^2 ... x_n^2\}$$

On vérifie aisément que cet ensemble est convexe (prendre le théorème des fonctions implicites ou faire un dessin dans $\mathbb{R}^2_+$). Or cette technologie admet des rendements d'échelle croissant car si, par exemple, à partir d'une combinaison de facteurs $(x_1, ..., x_l) \in \mathbb{R}^l_+$ permettant de produire au maximum y unités d'output, on double l'échelle de production, on pourra produire $(2x_1)^2(2x_2)^2 ... (2x_n)^2 = 4y$ unités d'output.

Exercice 4 Dire, pour chacune des fonctions de production suivantes (où $a, b \in \mathbb{R}_{++}$), si la technologie qu'elle représente satisfait les hypothèses vues en classe (en omettant la propriété d'irréversibilité):
(i) $f(x_1, x_2) = e^{\min(ax_1, bx_2)}$
(ii) $f(x_1, x_2) = ax_1 + x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + bx_2$
(iii) $f(x_1, x_2) = ax_1 - x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + bx_2$
(iv) $f(x_1, x_2) = \min(1 - a/x_1, 1 - b/x_2)$

(i) L'ensemble de production décrit par cette technologie n'est pas convexe (par exemple les activités productives $(1, 0, 0)$ et $(e, \frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ sont technologiquement possibles mais la combinaison convexe $(\frac{e+1}{2}, \frac{1}{2a}, \frac{1}{2b})$ ne l'est pas $(\frac{e+1}{2} > e^{\frac{1}{2}} = f(\frac{1}{2a}, \frac{1}{2b})$. L'ensemble de production viole en outre l'impossibilité de production gratuite $f(0, 0) = e^0 = 1 > 0$ et la possibilité de ne rien produire

(ii) La technologie décrite par la fonction de production $f(x_1, x_2) = ax_1 + (x_1x_2)^{\frac{1}{2}} + bx_2$ satisfait toutes les conditions vues en classe (on vérifie que la fonction est concave en constatant que $f_{ii} = \frac{-x_j^{\frac{1}{2}}}{4x_i^{\frac{3}{2}}} \leq 0$ pour $i = 1, 2$ et $j \neq i$ et $f_{11}f_{22} - f_{12}^2 = \frac{1}{16x_ix_2} - \frac{1}{16x_ix_2} \geq 0$

(iii) La technologie décrite par la fonction de production $f(x_1, x_2) = ax_1 - (x_1x_2)^{\frac{1}{2}} + bx_2$ ne satisfait l'hypothèse de libre disposition des excédents car la fonction de production n'est pas monotone croissante (ses dérivées partielles ne sont pas positives). Par exemple

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} = a - \frac{1}{2}(\frac{x_2}{x_1})^{\frac{1}{2}} < 0 \text{ si } \frac{x_2}{x_1} > 4a^2$$

Elle n'est pas convexe car, si on considère les combinaisons d'emplois des facteurs $x = (\frac{b}{a}, 0)$ et $z = (0, 1)$. On remarque que ces deux combinaisons permettent de produire (au maximum) b unités d'output car $f(\frac{b}{a},0) = f(0,1) = b$. Considérons maintenant la combinaison $(\frac{b}{2a},\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z$. Elle permet de produire

$$f(\frac{b}{2a},\frac{1}{2}) = b - \frac{1}{2}(\frac{b}{a})^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{2}}(b^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2a^{\frac{1}{2}}}) < b$$

ce qui viole la convexité.

(iv) La technologie représentée par la fonction de production $f(x_1,x_2) = \min(1-a/x_1, 1-b/x_2)$ ne satisfait pas la possibilité de non-production (pour produire 0 output, il faut utiliser $a > 0$ unités d'input 1 et $b > 0$ unités d'input 2. Par ailleurs, il est impossible d'opérer la technologie si on utilise aucun input. Toutes les autres hypothèses sont vérifiées (en particulier la convexité). preuve. Considérons n'importe quelle paire d'activités productives (y,x_1,x_2) et (y',x_1',x_2') techniquement possibles. On doit montrer que $(ty+(1-t)y', tx_1 + (1-t)x_1', tx_2+(1-t)x_2')$ est également techniquement possible pour tout nombre $t \in [0,1]$. (y,x_1,x_2) est techniquement possible ssi

$$y \leq \min(1-a/x_1, 1-b/x_2)$$

De même, (y',x_1',x_2') est techniquement possible ssi

$$y' \leq \min(1-a/x_1', 1-b/x_2')$$

Evidemment, si $t \in [0,1]$

$$ty \leq t\min(1-a/x_1, 1-b/x_2)$$

et

$$(1-t)y' \leq (1-t)\min(1-a/x_1', 1-b/x_2')$$

L'addition de ces deux inégalités nous donne donc

$$ty + (1-t)y' \leq t\min(1-a/x_1, 1-b/x_2) + (1-t)\min(1-a/x_1', 1-b/x_2') \quad \text{(A)}$$

Nous remarquons que, quelque soient les nombres α et β positifs, $1-a/\alpha \leq 1-b/\beta \Leftrightarrow \beta \geq \frac{b}{a}\alpha$. Posant $\Phi_1(x) = 1-a/x_1$ et $\Phi_2(x) = 1-b/x$, nous avons donc que $\min(\Phi_1(x_1),\Phi_2(x_i)) = \Phi_i(x_i) \Leftrightarrow \min(\Phi_1(tx_1),\Phi_2(tx_i)) = \Phi_i(tx_i)$ pour tout nombre t (pour $i = 1,2$). Par ailleurs on vérifie que les fonctions Φ_i $(i = 1,2)$ sont concaves (leur dérivée seconde est nulle). Nous savons donc que

$$\begin{aligned} & t\min(1-a/x_1, 1-b/x_2) + (1-t)\min(1-a/x_1', 1-b/x_2') && (1) \\ \leq \quad & \min(\Phi_1(tx_1+(1-t)x_1'), \Phi_2(tx_2+(1-t)x_2') && (2) \end{aligned}$$

La combinaison des inégalités (A) et (**??**) nous permet donc de conclure à la faisabilité technique de l'activité productive $(ty+(1-t)y', tx_1+(1-t)x_1', tx_2+(1-t)x_2')$.

Exercice 5 Montrer que si une technologie représentée par une fonction de production $f : R_+^l \to R$ est additive dans le sens où $f(x+z) = f(x)+f(z)$ pour tout x, $z \in R_+^l$, elle sera convexe si les inputs sont parfaitement divisibles.

Réponse: Par l'absurde, supposons $(\mathbf{x}, y)$, $(\mathbf{x}', y')$ et t (avec $(\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^l_+$ et $y, y' \in \mathbb{R}_+$ et $t \in [0,1]$) tels que $y \leq f(\mathbf{x})$ et $y' \leq f(\mathbf{x}')$ mais, en violation de la convexité, tels que

$$ty + (1-t)y' > f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}') \tag{3}$$

Par additivité l'inégalité (3) implique que

$$ty + (1-t)y' > f(t\mathbf{x}) + f((1-t)\mathbf{x}')$$

ce qui, en conjonction avec $y \leq f(\mathbf{x})$ et $y' \leq f(\mathbf{x}')$ implique forcément l'une ou l'autre des deux violations suivantes de la divisibilité

$$ty > f(t\mathbf{x})$$

ou

$$(1-t)y' > f((1-t)\mathbf{x}')$$

C.Q.F.D.

exercice 6: Trouver, pour chaque fonction de production, la fonction de profit qui lui est associée

(a) $f(x) = \ln x$ si $x \geq 1$
$= 0$ autrement

Réponse:

$$\pi(w,p) = \max_x \; p \ln x - wx$$

. L'entreprise peut s'assurer un profit nul en ne produisant pas et en n'employant aucun facteur de production. La condition de premier ordre (que doit nécessairement satisfaire un niveau strictement positif x^*d'emploi du facteur de production) est:

$$\frac{p}{x^*} = w \Leftrightarrow x^* = \frac{p}{w}$$

on a donc $\pi(w) = p(\ln p - \ln w - 1)$ si $p(\ln p - \ln w - 1) \geq 0 \Leftrightarrow w \leq \frac{p}{e}$ et $\pi(w) = 0$ sinon.

(b) $f(x_1, x_2) = 100 x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}}$

Réponse:

$$\begin{aligned} \pi(w_1, w_2, p) &= \max_{x_1, x_2} = p100 x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{4}} - w_1 x_1 - w_2 x_2 \\ x_i &\geq 0 \; i = 1,2 \end{aligned}$$

Les conditions de premier ordre que doivent nécessairement satisfaire des solutions intérieures x_1^*, x_2^* de ce programme sont:

$$50p \frac{x_2^{*\frac{1}{4}}}{x_1^{*\frac{1}{2}}} - w_1 = 0 \Leftrightarrow x_1^* = 2500 p^2 \frac{x_2^{*\frac{1}{2}}}{w_1^2} \tag{foc1}$$

et

$$25p \frac{x_1^{*\frac{1}{2}}}{x_2^{*\frac{3}{4}}} - w_2 = 0 \tag{foc2}$$

Substituant (foc1) dans (foc2), on obtient:

$$25p\frac{50px_2^{*\frac{1}{4}}}{w_1 x_2^{*\frac{3}{4}}} = w_2 \Leftrightarrow x_2^* = \frac{p^4 1250^2}{w_1^2 w_2^2}$$

et, en resubstituant cette expression dans (foc1)

$$x_1^* = \frac{2p^4 1250^2}{w_1^3 w_2}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\pi(w_1, w_2, p) &= p100(p^4\frac{2500 \times 1250}{w_1^3 w_2})^{\frac{1}{2}}(\frac{p^4 1250^2}{w_1^2 w_2^2})^{\frac{1}{4}} - w_1 p^4 \frac{2500 \times 1250}{w_1^3 w_2} - w_2 \frac{p^4 1250^2}{w_1^2 w_2^2} \\ &= 76p^4\frac{250^2}{w_1^2 w_2}\end{aligned}$$

(c) $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2)^{\frac{1}{2}}$ (pour a, $b \in \mathbb{R}_{++}$)

Réponse:

Cette technologie admet une substituabilité parfaite entre les deux facteurs de production (à un taux marginal de substitution constant de $\frac{a}{b}$). La politique d'emploi de la firme sera donc simple. Elle n'emploiera que du facteur 2 si $\frac{w_1}{w_2} > \frac{a}{b}$ (cas 1), elle n'emploiera que du facteur 1 si $\frac{w_1}{w_2} < \frac{a}{b}$ (cas 2) et sera indifférente entre n'importe quel mixte d'emploi des deux facteurs dans l'invraisemblable autre cas où $\frac{w_1}{w_2} = \frac{a}{b}$. Dans le cas i ($i = 1, 2$), la firme résout :

$$\max_{x_i} p\alpha_i x_i^{\frac{1}{2}} - w_i x_i$$

où $\alpha_1 = a^{\frac{1}{2}}$et $\alpha_2 = b^{\frac{1}{2}}$. La condition de premier ordre que satisfait nécessairement une solution intérieure à ce programme nous permet d'obtenir:

$$x_i^* = \frac{p^2 \alpha_i^2}{4w_i^2}$$

La fonction de profit de la firme sera donc de forme

$$\pi(w_1, w_2, p) = \frac{p^2}{4}\max(\frac{a}{w_1}, \frac{b}{w_2})$$

(d) $f(x_1, x_2) = (\min(x_1, x_2))^a$. Quelle propriété doit satisfaire le nombre a pour que la fonction de profit soit bien définie ?

Réponse:

Cette technologie admet une complémentarité parfaite entre les deux facteurs de production de sorte que tout emploi optimal (du point de vue de la firme) de ces deux facteurs doit satisfaire $x_1^* = x_2^* = x^*$. Le problème que résout l'entreprise devient donc

$$\max_x px^a - (w_1 + w_2)x$$

Ce problème n'est bien défini que si $0 \leq a \leq 1$ (rendements d'échelles non-croissants). Evidemment, si $a = 1$, les rendements d'échelles sont constants de sorte que les profits maximaux doivent être nuls pour tout niveau commun d'emploi des facteurs, ce qui ne se produira avec de la production positive que si $p = w_1 + w_2$. Dans le cas où $a < 1$, on détermine le niveau d'emploi optimal des deux facteurs par la condition de premier ordre, soit

$$x^* = (\frac{ap}{w_1 + w_2})^{\frac{1}{1-a}}$$

d'où on tire

$$\begin{aligned} \pi(w_1, w_2, p) &= p(\frac{ap}{w_1 + w_2})^{\frac{a}{1-a}} - (w_1 + w_2)(\frac{ap}{w_1 + w_2})^{\frac{1}{1-a}} \\ &= (\frac{(ap)}{(w_1 + w_2)^a})^{\frac{1}{1-a}}(\frac{1}{a} - 1) \end{aligned}$$

Exercice 7: Que mesure le surplus du producteur défini comme l'intégrale, sous la courbe d'offre de la firme, calculée entre deux prix niveaux de prix d'output quelconque ?

Réponse:
Par le lemme d'Hotelling, nous savons que

$$y(\overline{\mathbf{w}}, \overline{p}) \equiv \frac{\partial \pi(\overline{w}, \overline{p})}{\partial p}$$

Le surplus du producteur $s(p_0, p_1)$ entre deux niveaux de prix p_0 et p_1 est donné par

$$s(p_0, p_1) = \int_{p_0}^{p_1} y(\overline{\mathbf{w}}, \overline{p})dp = \pi(\overline{w}, p_1) - \pi(\overline{w}, p_0)$$

Exercice 8: Un économètre a collecté les données suivantes sur le comportement d'une firme produisant un output à partir de deux inputs.

	1er trimestre	2e trimestre	3e trimestre
prix de l'output	2	3	2,5
prix de l'input 1	1	0,5	2
prix de l'input 2	1	3	2
quantité d'output	100	100	90
quantité d'input 1	75	75	50
quantité d'input 2	75	55	50

Ce comportement peut-il résulter d'une firme qui maximise son profit dans un environnement parfaitement concurrentiel ? (Justifier).

Réponse: Pour que ce comportement résulte d'une firme maximisatrice de profit évoluant dans un environnement concurrentiel, il faut que, à chaque configuration de prix, l'activité productive choisie par la firme lui donne faiblement plus de profit que toute autre activité productive techniquement possible. Même si nous ne connaissons pas toutes les possibilités techniques de la firme, nous savons que les activités productives choisies par la firme dans l'une ou l'autre des trois circonstances décrites dans le tableau sont possibles. En observant ces activités productives, nous constatons rapidement que la firme décrite dans ce tableau ne peut pas maximiser son profit sous une contrainte technologique en considérant les prix auxquels elle est confrontée comme donnée. En effet, le profit réalisé par la firme au 1er trimestre aux prix du premier trimestre est de : $2 \times 100 - 1 \times 75 - 1 \times 75 = 50$. Or, en choisissant au premier trimestre l'activité productive choisie par elle au second (et donc techniquement possible), la firme aurait réalisé un profit de: $2 \times 100 - 1 \times 75 - 1 \times 55 = 70$. Le choix de la firme au premier semestre ne résulte donc pas d'une maximisation de profits.

Exercice 9. Une fonction de production f d'une firme qui utilise n inputs pour produire un output est dite “homothétique” si, pour toute liste d'inputs $x \in \mathbb{R}_+^n$, elle peut s'écrire comme $f(x) = h(g(x))$ pour une certaine fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ monotone croissante et pour une certaine fonction $g : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ homogène de degré 1. Montrer, sous des hypothèses adéquates, que la fonction de coûts $c : \mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R}_+$ associée à cette technologie peut s'écrire, pour n'importe quel liste de prix d'inputs $w \in \mathbb{R}_+^n$ et n'importe quel niveau d'output $y \in \mathbb{R}_+$ comme $c(w, y) = k(w)y$ pour une certaine fonction $k : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$.

Solution

Montrons d'abord que si $(x_1^*, ...x_n^*)$ est une combinaison d'inputs qui minimise le coût de produire $h(1)$ unités d'output aux prix $(w_1, ..., w_n)$, alors $(yx_1^*, ..., yx_n^*)$ minimise le coût de produire $h(y)$ unités d'output aux mêmes prix. Puisque $(x_1^*, ...x_n^*)$ permet de produire $h(1)$ d'output, on a $h(g(x_1^*, ..., x_n^*)) = h(1) \Leftrightarrow g(x_1^*, ..., x_n^*) = 1 \Leftrightarrow yg(x_1^*, ..., x_n^*) = y$ (par l'homogénéité de degré 1 de g) $\Leftrightarrow h(g(yx_1^*, ..., yx_n^*)) = h(y)$ Nous savons donc que $(yx_1^*, ..., yx_n^*)$ permet de produire au moins $h(y)$ unités d'output. Supposons par l'absurde que $(yx_1^*, ..., yx_n^*)$ ne soit pas la manière la moins coûteuse de produire $h(y)$ unités d'output aux prix $(p_1, ..., p_n)$ et qu'il existe une combinaison d'inputs $(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n)$ telle que $h(g(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n)) = h(y)$ et:

$$\sum_{j=1}^{n} w_j \widehat{x}_j < \sum_{j=1}^{n} w_j y x_j^* \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} w_j (\widehat{x}_j / y) < \sum_{j=1}^{n} w_j x_j^* (si\ y > 0)\ (A).$$

Puisque g est homogène de degré 1, $h(g(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n)) = h(y) \Leftrightarrow h(g(\widehat{x}_1/y, ..., \widehat{x}_n/y)) = h(\frac{1}{y}g(\widehat{x}_1, ..., \widehat{x}_n) = h(1)$ et, donc, $(\widehat{x}_1/y, ..., \widehat{x}_n/y)$ permet de produire $h(1)$ unité d'output. Mais ce fait est contradictoire avec l'inégalité (A) et la définition de

$(x_1^*, ...x_n^*)$ comme combinaison d'inputs qui minimise le coût de produire $h(1)$ unités d'output aux prix $(w_1, ..., w_n)$. Définissons alors $k(w)$ par:

$$k(w) = C(w, h(1)) = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j^*$$

Nous avons alors que, pour tout $h(y)$, $C(w, h(y)) = h(y)k(w)$. En clair, nous avons montré que pour $x = h(y)$, nous avons $C(w, y) = yk(w)$.

Exercice 10: Soit une technologie d'une firme monoproduit qui est monotone et convexe. Supposons que le coût moyen soit croissant par rapport au niveau d'output pour tous les niveaux d'inputs et pour toutes les combinaisons de prix des facteurs. Montrer que les rendements d'échelle sur la frontière de l'ensemble de production doivent être partout décroissants.

Solution: Soit $(x_1^*, ..., x_n^*)$, une combinaison d'inputs qui résout, pour un vecteur de prix $(p_1, ..., p_n)$ et un niveau d'output y donnés, le programme

$$C(p_1, ..., p_n, y) = \min_{(x_1,...,x_n)} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \text{ sous contrainte que } (x_1, ..., x_n, y) \text{ soit techniquement possible}$$

Considérons tout niveau d'output $y' > y$. Soit $(x_1', ..., x_n')$ permettant de produire y' au coût minimum aux prix $(p_1, ..., p_n)$. Puisque le coût moyen est croissant, on a $(\sum_{j=1}^{n} p_j x_j')/y' > \sum_{j=1}^{n} (p_j x_j^*)/y \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} p_j x_j' > \sum_{j=1}^{n} (p_j \frac{y'}{y} x_j^*)$. Cette dernière inégalité n'est compatible avec la définition de $(x_1', ..., x_n')$ comme combinaison d'inputs qui minimise le coût de produire y' à prix $(p_1, ..., p_n)$ que si la combinaison d'inputs $(\frac{y'}{y} x_1^*, ..., \frac{y'}{y} x_n^*)$ ne permet pas de produire y'. On a donc que $(x_1^*, ..., x_n^*, y)$ est techniquement possible mais que $(\frac{y'}{y} x_1^*, ..., \frac{y'}{y} x_n^*, \frac{y'}{y} y)$ n'est pas techniquement possible, ce qui implique donc que les rendements sont décroissants. CQFD

Exercice 11 Lesquelles (laquelle) des fonctions suivantes peuvent être des fonctions de coûts d'une entreprise monoproduit évoluant sur un marché des facteurs concurrentiel (justifier).

(i) $C(p, y) = p_1^{\frac{3}{4}} p_2^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{2}}$

Réponse: Cette fonction n'est pas une fonction de coûts car elle n'est pas homogène de degré 1 par rapport aux prix des facteurs. En effet, pour $t > 1$ $C(tw, y) = (tw_1 tw_2)^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{3}{2}} w_1 tw_2{}^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{3}{2}} C(w, y) > tC(w, y)$.

$(ii) C(p, y) = 2(p_1 p_2 y)^{\frac{1}{2}}$

Réponse: continue ? ok (easy).

- homogène de degré 1 en prix ? $C(tp_1, tp_2, y) = (tp_1 tp_2)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = t(p_1 p_2)^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = tC(p_1, p_2, y)$ OK!

- Non-décroissante par rapport aux prix et au niveau de productioon ? OK! (facile)

- Concave ?

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C(p_1,p_2,y)}{\partial^2 p_1} &= -\frac{p_2^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}}{4p_1^{\frac{3}{2}}} < 0\\ \frac{\partial^2 C(p_1,p_2,y)}{\partial^2 p_2} &= -\frac{p_1^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}}{4p_2^{\frac{3}{2}}} < 0\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 C(.)}{\partial^2 p_1}\frac{\partial^2 C(.)}{\partial^2 p_2} - (\frac{\partial^2 C(.)}{\partial p_1 \partial p_2})^2 = 0$$

Donc cette fonction est bien une fonction de coûts..

(iii) $C(p,y) = (p_1 + (p_1p_2)^{\frac{1}{2}} + p_2)y$

Réponse: continue ? ok (facile).

- homogène de degré 1 en prix ? $C(tp_1, tp_2, y) = (tp_1 + (tp_1tp_2)^{\frac{1}{2}} + tp_2)y = t(p_1 + (p_1p_2)^{\frac{1}{2}} + p_2)y = tC(p_1,p_2,y)$ OK!
- Non décroissante par rapport à p_i $(i = 1,2)$ et y ? OK! (facile)
- Concave ?

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C(p_1,p_2,y)}{\partial^2 p_1} &= -\frac{p_2^{\frac{1}{2}} y}{4p_1^{\frac{3}{2}}} < 0\\ \frac{\partial^2 C(p_1,p_2,y)}{\partial^2 p_2} &= -\frac{p_1^{\frac{1}{2}} y}{4p_2^{\frac{3}{2}}} < 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C(.)}{\partial^2 p_1}\frac{\partial^2 C(.)}{\partial^2 p_2} - (\frac{\partial^2 C(.)}{\partial p_1 \partial p_2})^2 &= \\ \frac{1}{16}\frac{p_2^{1/2}}{p_1^{3/2}}\frac{p_1^{1/2}}{p_2^{3/2}} - \frac{1}{16p_1p_2} &= 0\end{aligned}$$

Oui! Cette fonction est donc bien une fonction de coûts.

(iv) $C(p,y) = (p_1 - (p_1p_2)^{\frac{1}{2}} + p_2)y$

Réponse: Cette fonction n'est pas une fonction de coûts car elle n'est pas faiblement croissante par rapport aux prix des inputs. Si $\frac{p_2}{p_1} > 4$, la dérivée de C par rapport à p_1 est en effet négative.

(v) $C(p,y) = (p_1e^{-p_1} + p_2)y$

Réponse: Cette fonction est continue (facile) mais n'est pas croissante par rapport au prix du facteur 1 car:

$$\frac{\partial C(.)}{\partial p_1} = e^{-p_1}(1 - p_1) < 0 \text{ pour } p_1 > 0$$

De plus cette fonction n'est pas homogène de degré 1 par rapport aux prix (prouvez le !!!!). Nous ne sommes donc pas en présence d'une fonction de coûts.

$(vi)\ C(p,y) = (p_1p_2)^{\frac{1}{2}}(y + \frac{1}{y})$

Réponse: Cette fonction n'est pas une fonction de coûts car elle n'est pas croissante par rapport à y.

$$\frac{\partial C(.)}{\partial y} = (p_1p_2)^{\frac{1}{2}} - \frac{(p_1p_2)^{\frac{1}{2}}}{y^2} = (p_1p_2)^{\frac{1}{2}}[1 - \frac{1}{y^2}] < 0 \text{ if } y < 1$$

Exercice 12 Pour quelles valeurs des paramètres $(a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ les deux fonctions suivantes peuvent être des demandes conditionnelles d'une firme monoproduit utilisant deux facteurs de production ?

$$\begin{aligned} x_1(p_1, p_2, y) &= (a + bp_1^{\alpha}p_2^{\beta})y \\ x_2(p_1, p_2, y) &= (c + dp_1^{\gamma}p_2^{\delta})y \end{aligned}$$

Réponse (en anglais): Conditional factor demands must be positive for all $(p_1, p_2, y) \in \mathbb{R}^3_{++}$. Hence a, b, c and d must all be non-negative. Conditional demand functions must also be homogenous of degree 0 in factor prices. Hence for every number $t > 1$:

$$\begin{aligned} x_1(tp_1, tp_2, y) &= (a + b(tp_1)^{\alpha}(tp_2)^{\beta})y \\ &= (a + t^{\alpha+\beta}bp_1^{\alpha}p_2^{\beta})y \\ &= x_1(p_1, p_2, y) \end{aligned}$$

if and only if $a = 0$ and $\alpha + \beta = 0$. Hence the two parameters α and β must be of opposite sign. Analogously, we conclude that $c = 0$ and $\gamma + \delta = 0$. From Hotelling lemma, we know that at every given factor prices $\overline{p}_1, \overline{p}_2$ and production level $\overline{y}$:

$$\partial x_j(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{y})/\partial p_i = \partial^2 C(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{y})/\partial p_j \partial p_i$$

for $i = 1, 2$ and $j = 1, 2$ where C is the cost function. Because C is concave, we must have:

$$\partial x_j(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{y})/\partial p_j \leq 0$$

for all j and therefore:

$$\partial x_1(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{y})/\partial p_1 = \alpha b\overline{p}_1^{\alpha-1}\overline{p}_2^{\beta}y \leq 0$$

and

$$\partial x_2(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{y})/\partial p_2 = \delta d\overline{p}_1^{\gamma}\overline{p}_2^{\delta-1}y \leq 0$$

which implies that both α and δ be non positive. Moreover, the symmetry of the cross-price effects requires that

$$\begin{aligned} \partial x_1(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{y})/\partial p_2 &= \beta b\overline{p}_1^{\alpha}\overline{p}_2^{\beta-1}y \\ &= \partial x_2(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{y})/\partial p_1 \\ &= d\gamma\overline{p}_1^{\gamma-1}\overline{p}_2^{\delta}y \end{aligned}$$

for all prices and production level requires that:

$$\begin{aligned}
\beta - 1 &= \delta \\
\alpha &= \gamma - 1 \\
\beta b &= d\gamma
\end{aligned}$$

Now, since $\beta = -\alpha$, we have that

$$-\alpha - 1 = \delta$$

and

$$\alpha = \gamma - 1$$

from which we conclude that $-\delta = \gamma$. Now, since:

$$\beta b = d\gamma$$

we have that:

$$(\delta + 1)b = d\gamma$$

and therefore:

$$\begin{aligned}
(1-\gamma)b &= d\gamma \\
&\Leftrightarrow \\
\gamma &= \frac{b}{b+d}
\end{aligned}$$

Other restrictions can be obtained from the condition that

$$\begin{aligned}
(\partial x_1(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{y})/\partial p_1)(\partial x_2(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{y})/\partial p_2) - [\partial x_1(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \overline{y})/\partial p_2]^2 &\geq 0 \\
&\Leftrightarrow \\
\alpha\delta b d \overline{p}_1^{\alpha-1+\gamma} \overline{p}_2^{\beta+\delta-1} y^2 - \beta^2 b^2 \overline{p}_1^{2\alpha} \overline{p}_2^{2\beta-21} y^2 &\geq 0
\end{aligned}$$

Find them!