# La fourniture de biens et facteurs publics en présence de ménages et d'entreprises mobiles

Pascale Duran-Vigneron

Février 2007

## 1 Le modèle

On suppose un pays dirigé par un gouvernement central ayant compétence sur l'ensemble du territoire, et composé de deux régions, chacune étant gérée par un gouvernement régional. Il n'existe pas de lien hiérarchique entre les différents niveaux de gouvernement. Le pays est composé de ménages et d'entreprises parfaitement mobiles. Les entreprises se partagent la production d'un même bien privé. Les ménages travaillent, détiennent une part égale de chaque entreprise et sont propriétaires de toute la terre du pays.

Chaque région i dispose d'une quantité fixe de terre $L_i$ et son gouvernement local fournit un bien public $z_i$ à ses résidents et un facteur public $g_i$ à ses entreprises, leur production étant financée par un ensemble d'impôts. On suppose par ailleurs l'absence d'effets de débordement.

Dans ce modèle, il s'agira pour les gouvernements locaux supposés bienveillants de choisir simultanément leurs niveaux de bien public, de facteur public et d'impôts en cherchant à maximiser l'utilité de leurs résidents. Ainsi, les ménages et les entreprises étant mobiles, ce modèle va faire appaître des interactions stratégiques entre les régions, ce qui pose la question de l'existence d'un équilibre de Nash efficace.

### 1.1 Les ménages

Chaque région i comporte $n_i^M$ ménages homogènes, avec $n_1^M + n_2^M = N^M$.

Le ménage représentatif de la région i est caractérisé par la fonction d'utilité: $U^i = U(x_i, z_i)$. $x_i$ représente le niveau de consommation de biens privés et $z_i$ l'offre de bien public local. Le bien privé est le bien numéraire. La fonction d'utilité est deux fois différentiable et satisfait les hypothèses standard. L'équilibre de localisation est atteint lorsque $U(x_1, z_1) = U(x_2, z_2)$.

Les revenus des ménages proviennent en partie de la détention de terre. L'ensemble des ménages du pays détiennent une part égale de la terre de chaque région. La rente foncière est soumise à une taxe locale proportionnelle $t_i$ pour la terre située dans la région i. $r_i$ est la rente unitaire brute de la région i.

Chaque ménage est également doté d'une unité de travail dont l'offre est inélastique et s'effectue dans la région de résidence. Il reçoit un salaire $w_i$ ainsi qu'un revenu provenant de la détention du profit des entreprises. Tous les ménages sont propriétaires d'une part égale de chaque entreprise et reçoivent à ce titre une part égale de leur profit après impôt $\pi^i$. Les ménages de la région i supportent un impôt local forfaitaire $\tau_i^M$. La contrainte budgétaire d'un ménage mobile de la région i est donc définie par:

$$x_i = w_i + (1-t_j)r_j\frac{L_j}{N^M} + (1-t_i)r_i\frac{L_i}{N^M} + \frac{1}{N^M}(n_1^E\pi^1 + n_2^E\pi^2) - \tau_i^M \tag{1}$$

avec $n_i^E$ le nombre d'entreprises localisées dans la région i.

## 1.2 Les entreprises

Le pays comprend un nombre fixe $N^E$ d'entreprises, avec $N^E = n_1^E + n_2^E$. Toutes les entreprises utilisent la même technologie et sont caractérisées par la fonction de production $F^i = F(l_i, n_i, g_i)$. Au sein d'une même région, la main-d'oeuvre et la terre sont réparties de manière équivalente entre les firmes, c'est-à-dire $n_i = \frac{n_i^M}{n_i^E}$ et $l_i = \frac{L_i}{n_i^E}$. Les entreprises disposent également d'un facteur public local $g_i$ comme troisième facteur de production.

La fonction de production est deux fois dérivable et concave en $l_i$ et $n_i$.

Après avoir rémunéré le travail et la terre, chaque firme doit également s'acquitter d'un impôt local forfaitaire lié au lieu de résidence $\tau_i^E$. Le profit après impôt d'une firme de la région i s'écrit alors $\pi^i = F^i - r_i l_i - w_i n_i - \tau_i^E$. Par ailleurs, les firmes cherchant à maximiser leur profit, on a: $F_l^i = r_i$ et $F_n^i = w_i$.

L'équilibre de localisation est donné par $\pi^1 = \pi^2$.

## 1.3 Les gouvernements locaux

Chaque région offre un bien public local et un facteur public local dont les coûts de fourniture respectifs sont: $C^i(z_i, n_i^M)$ et $H^i(g_i, n_i^E)$. Ces coûts sont exprimés en unités de bien privé et varient positivement d'une part avec le niveau du bien ou du facteur local ($\frac{\partial C^i}{\partial z_i} \geq 0$ et $\frac{\partial H^i}{\partial g_i} \geq 0$) et d'autre part avec le nombre d'usagers, ce sont les coûts de congestion ($\frac{\partial C^i}{\partial n_i^M} \geq 0$ et $\frac{\partial H^i}{\partial n_i^E} \geq 0$). Pour financer ces dépenses, chaque gouvernement local dispose des deux impôts forfaitaires $\tau_i^M$ et $\tau_i^E$ définis précédemment, et de la taxe proportionnelle sur la rente $t_i$. Le montant de cette dernière est plafonné au niveau $\overline{t_i} < 1$. La contrainte budgétaire du gouvernement local de la région i est alors donnée par:

$$n_i^M\tau_i^M + n_i^E\tau_i^E + t_i r_i L_i = C^i(z_i, n_i^M) + H^i(g_i, n_i^E) \tag{2}$$

Le modèle ainsi défini, la question est de savoir si la concurrence interrégionale en présence de ménages et d'entreprises mobiles peut aboutir à une allocation efficace des ressources. Cette allocation est définie dans la section suivante.

## 2 L'allocation efficace

On définit l'allocation efficace des ressources en considérant l'existence d'un planificateur social bienveillant dont le programme est donné par:

$$\max_{x_i, z_i, g_i, n_i^M, n_i^E} U^1(x_1, z_1) \tag{3}$$

sous les contraintes:

$$U^2(x_2, z_2) = U^1(x_1, z_1) \tag{4}$$

$$N^M - n_1^M - n_2^M = 0 \tag{5}$$

$$N^E - n_1^E - n_2^E = 0 \tag{6}$$

$$\sum_i \left[ n_i^E F(\frac{L_i}{n_i^E}, \frac{n_i^M}{n_i^E}, g_i) - n_i^M x_i - C^i(z_i, n_i^M) - H^i(g_i, n_i^E) \right] = 0 \tag{7}$$

D'après l'équation (3), le planificateur social maximise l'utilité d'un ménage représentatif de la région 1, en tenant compte de la condition d'équilibre de localisation des ménages (équation (4)).

Les contraintes (5) et (6) stipulent que les ménages et les firmes doivent nécessairement se localiser dans l'une des deux régions.

Enfin l'équation (7) représente la condition d'équilibre sur le marché des biens.

Les conditions du premier ordre donnent:

$$n_i^M \frac{U_z^i}{U_x^i} = C_z^i \tag{8}$$

$$n_i^E F_g^i = H_g^i \tag{9}$$

$$F_n^1 - x_1 - C_n^1 = F_n^2 - x_2 - C_n^2 \tag{10}$$

$$F^1 - l_1 F_l^1 - n_1 F_n^1 - H_n^1 = F^2 - l_2 F_l^2 - n_2 F_n^2 - H_n^2 \tag{11}$$

$U_k^i$ correspond à l'utilité marginale du bien k pour un ménage résidant dans la région i et $C_z^i$ représente le coût marginal de production du bien public. Ainsi l'équation (8) correspond à la règle de Samuelson: le niveau de fourniture du bien public est efficace dès lors que la somme des taux marginaux de substitution est égale au coût marginal de production du bien public $C_z^i$.

$F_k^i$ correspond à la productivité marginale du facteur de production k dans la région i. L'équation (9) peut alors être assimilée à une régle de Samuelson pour la fourniture du facteur public: la somme des productivités marginales du facteur public doit être égale au coût marginal de production du facteur public $H_g^i$.

Les équations (10) et (11) nous donnent les conditions d'allocation efficace du travail et des entreprises entre les deux régions. Ainsi, d'après l'équation (10), le bénéfice social net pour une région d'accueillir un ménage supplémentaire doit être le même dans les deux régions, le bénéfice provenant de sa productvité marginale $F_n^i$ et le coût étant lié à sa consommation de bien privé $x_i$ et aux coûts de congestion qu'il engendre, $C_n^i$. En ce qui concerne les entreprises, l'équation (11) stipule de manière similaire que le bénéfice social net pour une région d'accueillir une entreprise supplémentaire doit s'égaliser entre les régions, le bénéfice étant le profit brut et le coût provenant de la congestion sur le facteur public.

## 3 L'équilibre concurrentiel

L'allocation optimale des ressources ainsi définie, la question est de savoir si deux gouvernements locaux choisissant leur politique simultanément parviennent à ce résultat.

En combinant les contraintes budgétaires (1) et (2), on obtient:

$$x_i = \frac{1}{n_i^M}\left[n_i^E F^i + \frac{n_i^M}{N^M}\left[(1-t_j)F_l^j L_j + n_j^E \pi^j\right] - \frac{n_j^M}{N^M}\left[(1-t_i)F_l^i L_i + n_i^E \pi^i\right] - \left(C^i + H^i\right)\right] \tag{12}$$

Chaque décideur public local a pour objectif la maximisation de l'utilité du ménage représentatif par rapport $\tau_1^E$ ,$t_1$ ,$z_1$ et $g_1$, étant donné $\tau_2^E$ ,$t_2$ ,$z_2$ et $g_2$ (équilibre de Nash) Le programme du gouvernement local est le suivant:

$$\max_{\tau_1^E, t_1, z_1, g_1, n_1^M, n_1^E} U^1(x_1, z_1) \tag{13}$$

sous les contraintes:

$$\overline{t_1} - t_1 \geq 0 \qquad (\lambda_1^1)$$

$$U^1(x_1, z_1) = U^2(x_2, z_2) \qquad (\lambda_2^1)$$

$$\pi^1 = \pi^2 \qquad (\lambda_3^1)$$

avec $x_1$ et $x_2$ satisfaisant l'équation (12) et en utilisant $n_2^M = N^M - n_1^M$ et $n_2^E = N^E - n_1^E$ d'après les équations (5) et (6).

On constate que $n_1^M$ et $n_1^E$ font partie des variables de contrôle du gouvernment local. C'est pourquoi les contraintes relatives aux conditions d'équilibre de localisation ont été ajoutées. Une procédure alternative aurait été d'utiliser les conditions d'équilibre pour déterminer $n_1^M$ et $n_1^E$ comme des fonctions $\tau_i^E$ ,$t_i$ ,$z_i$ et $g_i$ et de considérer alors $n_1^M$ et $n_1^E$ comme des variables endogènes. Cependant, la technique utilisée ici permet de simplifier les calculs.

$\lambda_1^1$ correspond au multiplicateur de Lagrange appliqué à la première contrainte du programme de maximisation de la région 1 portant sur $t_1$. $\lambda_2^1$ et $\lambda_3^1$ sont les multiplicateurs de Lagrange associés respectivement aux deuxième et troisième contraintes, à savoir les conditions d'équilibre de localisation des ménages et des entreprises.

Pour la région 1, les dérivées du lagrangien $\mathcal{L}^1$ nous donnent:

$$\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial \tau_1^E} = \left(1+\lambda_2^1\right)\frac{U_x^1}{n_1^M}\frac{n_2^M n_1^E}{N^M} + \lambda_2^1 \frac{U_x^2}{n_2^M}\frac{n_2^M n_1^E}{N^M} - \lambda_3^1 = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial t_1} = \left(1+\lambda_2^1\right)\frac{U_x^1}{n_1^M}\frac{n_2^M}{N^M}F_l^1 L_1 + \lambda_2^1 \frac{U_x^2}{n_2^M}\frac{n_2^M}{N^M}F_l^1 L_1 - \lambda_1^1 = 0 \tag{15}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial z_1} = \frac{\left(1+\lambda_2^1\right)}{n_1^M}\left(n_1^M U_z^1 - U_x^1 C_z^1\right) = 0 \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial g_1} &= \left(1+\lambda_2^1\right)\frac{U_x^1}{n_1^M}\left[n_1^E F_g^1 - H_g^1 - \frac{n_2^M}{N^M}\left[\left(1-t_1\right)F_{lg}^1 L_1 + n_1^E\frac{\partial \pi^1}{\partial g_1}\right]\right] \\ &\quad - \lambda_2^1\frac{U_x^2}{n_2^M}\frac{n_1^M}{N^M}\left[\left(1-t_1\right)F_{lg}^1 L_1 + n_1^E\frac{\partial \pi^1}{\partial g_1}\right] + \lambda_3^1\frac{\partial \pi^1}{\partial g_1} = 0\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial n_1^M} &= \left(1+\lambda_2^1\right)U_x^1\frac{\partial x_1}{\partial n_1^M} - \lambda_2^1 U_x^2\frac{\partial x_2}{\partial n_1^M} + \lambda_3^1\left[\frac{\partial \pi^1}{\partial n_1^M} - \frac{\partial \pi^2}{\partial n_1^M}\right] \\ &= \left(1+\lambda_2^1\right)\frac{U_x^1}{n_1^M}\left(F_n^1 - x_1 - C_n^1\right) + \lambda_2^1\frac{U_x^2}{n_2^M}\left[F_n^2 - x_2 - C_n^2\right] \\ &\quad + \left[\left(1+\lambda_2^1\right)\frac{U_x^1}{n_1^M} + \lambda_2^1\frac{U_x^2}{n_2^M}\right]\left[\frac{n_1^M}{N^M}\left(\left(1-t_2\right)\frac{\partial F_l^2}{\partial n_1^M}L_2 + n_2^E\frac{\partial \pi^2}{\partial n_1^M}\right) - \frac{n_2^M}{N^M}\left(\left(1-t_1\right)\frac{\partial F_l^1}{\partial n_1^M}L_1 + n_1^E\frac{\partial \pi^1}{\partial n_1^M}\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{N^M}\left[\left(1+\lambda_2^1\right)\frac{U_x^1}{n_1^M} + \lambda_2^1\frac{U_x^2}{n_2^M}\right]\left[\left(1-t_2\right)F_l^2 L_2 + n_2^E\pi^2 + \left(1-t_1\right)F_l^1 L_1 + n_1^E\pi^1\right] + \lambda_3^1\left[\frac{\partial \pi^1}{\partial n_1^M} - \frac{\partial \pi^2}{\partial n_1^M}\right] = 0\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial n_1^E} &= \left(1+\lambda_2^1\right)U_x^1\frac{\partial x_1}{\partial n_1^E} - \lambda_2^1 U_x^2\frac{\partial x_2}{\partial n_1^E} + \lambda_3^1\left[\frac{\partial \pi^1}{\partial n_1^E} - \frac{\partial \pi^2}{\partial n_1^E}\right] \\ &= \left(1+\lambda_2^1\right)\frac{U_x^1}{n_1^M}\left[F^1 - l_1 F_l^1 - n_1 F_n^1 - H_n^1\right] + \lambda_2^1\frac{U_x^2}{n_2^M}\left[F^2 - l_2 F_l^2 - n_2 F_n^2 - H_n^2\right] \\ &\quad + \left[\left(1+\lambda_2^1\right)\frac{U_x^1}{n_1^M} + \lambda_2^1\frac{U_x^2}{n_2^M}\right]\left[\frac{n_1^M}{N^M}\left(\left(1-t_2\right)\frac{\partial F_l^2}{\partial n_1^E}L_2 + n_2^E\frac{\partial \pi^2}{\partial n_1^E}\right) - \frac{n_2^M}{N^M}\left(\left(1-t_1\right)\frac{\partial F_l^1}{\partial n_1^E}L_1 + n_1^E\frac{\partial \pi^1}{\partial n_1^E}\right)\right] \\ &\quad - \left[\left(1+\lambda_2^1\right)\frac{U_x^1}{n_1^M} + \lambda_2^1\frac{U_x^2}{n_2^M}\right]\left[\frac{n_1^M \pi^2}{N^M} + \frac{n_2^M \pi^1}{N^M}\right] + \lambda_3^1\left[\frac{\partial \pi^1}{\partial n_1^E} - \frac{\partial \pi^2}{\partial n_1^E}\right] = 0\end{aligned} \tag{19}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial \lambda_1^1} = \overline{t_1} - t_1 \geq 0 \qquad \lambda_1^1 \geq 0 \quad et \quad \lambda_1^1\frac{\partial L}{\partial \lambda_1^1} = 0 \tag{20}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial \lambda_2^1} = U_1 - U_2 = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^1}{\partial \lambda_3^1} = \pi_1 - \pi_2 = 0 \tag{22}$$

Il convient à présent de combiner ces différentes conditions du premier ordre afin de déterminer l'équilibre de Nash.

On exprime tout d'abord $\lambda_3^1$ à partir de l'équation 19 et on le remplace par son expression dans l'équation 18. On utilise alors cette dernière équation pour exprimer $\lambda_2^1$.

Par ailleurs, avec $\lambda_1^1 \geq 0$, d'après l'équation 15 on a: $\left(1+\lambda_2^1\right)\dfrac{U_x^1}{n_1^M}+\lambda_2^1\dfrac{U_x^2}{n_2^M} \geq 0$.

Sachant que $\dfrac{\partial X}{\partial n_1^E}=-\dfrac{\partial X}{\partial n_2^E}$ et $\dfrac{\partial X}{\partial n_1^M}=-\dfrac{\partial X}{\partial n_2^M}$ avec $X = x_i$ ou $\pi^i$, en injectant dans cette dernière inéquation l'expression trouvée pour $\lambda_2^1$, on trouve:

$$\frac{U_x^1 U_x^2\left[\left(\frac{\partial \pi^1}{\partial n_1^M}+\frac{\partial \pi^2}{\partial n_2^M}\right)\left(\frac{1}{n_1^M}\frac{\partial x_2}{\partial n_2^E}-\frac{1}{n_2^M}\frac{\partial x_1}{\partial n_1^E}\right)-\left(\frac{\partial \pi^1}{\partial n_1^E}+\frac{\partial \pi^2}{\partial n_2^E}\right)\left(\frac{1}{n_1^M}\frac{\partial x_2}{\partial n_2^M}-\frac{1}{n_2^M}\frac{\partial x_1}{\partial n_1^M}\right)\right]}{\left(\frac{\partial \pi^1}{\partial n_1^M}+\frac{\partial \pi^2}{\partial n_2^M}\right)\left(U_x^1\frac{\partial x_1}{\partial n_1^E}+U_x^2\frac{\partial x_2}{\partial n_2^E}\right)-\left(\frac{\partial \pi^1}{\partial n_1^E}+\frac{\partial \pi^2}{\partial n_2^E}\right)\left(U_x^1\frac{\partial x_1}{\partial n_1^M}+U_x^2\frac{\partial x_2}{\partial n_2^M}\right)} \geq 0 \tag{23}$$

On suppose que l'équilibre de localisation est stable ce qui implique que le dénominateur de l'expression 23 est négatif.

On a alors:

$$\left(\frac{\partial \pi^1}{\partial n_1^M}+\frac{\partial \pi^2}{\partial n_2^M}\right)\left(\frac{1}{n_1^M}\frac{\partial x_2}{\partial n_2^E}-\frac{1}{n_2^M}\frac{\partial x_1}{\partial n_1^E}\right)-\left(\frac{\partial \pi^1}{\partial n_1^E}+\frac{\partial \pi^2}{\partial n_2^E}\right)\left(\frac{1}{n_1^M}\frac{\partial x_2}{\partial n_2^M}-\frac{1}{n_2^M}\frac{\partial x_1}{\partial n_1^M}\right) \leq 0 \tag{24}$$

La résolution du programme de maximisation de la région 2 donne le résultat symétrique:

$$\left(\frac{\partial \pi^1}{\partial n_1^M}+\frac{\partial \pi^2}{\partial n_2^M}\right)\left(\frac{1}{n_1^M}\frac{\partial x_2}{\partial n_2^E}-\frac{1}{n_2^M}\frac{\partial x_1}{\partial n_1^E}\right)-\left(\frac{\partial \pi^1}{\partial n_1^E}+\frac{\partial \pi^2}{\partial n_2^E}\right)\left(\frac{1}{n_1^M}\frac{\partial x_2}{\partial n_2^M}-\frac{1}{n_2^M}\frac{\partial x_1}{\partial n_1^M}\right) \geq 0 \tag{25}$$

Ainsi, dès lors que $\lambda_1^i > 0$ pour $i = 1$ ou 2, il n'existe pas d'équilibre de Nash.

L'équilibre de Nash nécessite donc $\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = 0$. Les conditions du premier ordre donnent alors:

$$n_i^M\frac{U_z^i}{U_x^i} = C_z^i \qquad \textit{pour } i=1,2 \tag{26}$$

$$n_i^E F_g^i - H_g^i = 0 \qquad \textit{pour } i=1,2 \tag{27}$$

$$\left[F_n^1 - x_1 - C_n^1\right]-\left[F_n^2 - x_2 - C_n^2\right] = 0 \tag{28}$$

$$\left[F^1 - l_1 F - n_1 F_n^1 - H_n^1\right]-\left[F^2 - l_2 F_l^2 - n_2 F_n^2 - H_n^2\right] = 0 \tag{29}$$

On constate que l'équilibre de Nash est efficace: aucune intervention du gouvernement central n'est requise.pour atteindre l'efficacité.

Par ailleurs, on constate qu'à l'équilibre de Nash, $\lambda_3^1 = \lambda_3^2 = 0$. On en déduit que la mobilité parfaite des ménages suffit à assurer l'efficacité, que les entreprises soient ou non mobiles.