Gini ou entropie ? Un choix basé sur le critère de multi-décomposabilité

Stéphane Mussard*

et Michel Terraza*

Résumé. Les mesures d'inégalité du revenu rassemblent deux types d'indicateurs décomposables : les indices décomposables en sous-populations et les indices décomposables en sources de revenu. Les premiers permettent de partager l'inégalité totale en une inégalité intragroupe et une inégalité intergroupe et les seconds d'attribuer à chaque facteur de revenu (revenu du travail, revenu du capital, taxes, etc.) une part de l'inégalité totale. La littérature indique que ces mesures décomposables appartiennent à deux ensembles disjoints. Cet article démontre que certains indices possèdent une structure de décomposition basée sur l'emploi simultané des deux types de décomposition : on les appelle les mesures multi-décomposables.
Mots-clés : Décomposition en sous-populations, Décomposition en sources de revenu, Entropie, Gini, Multi-décomposition.
Classification JEL : D63, D31.

Abstract. The income inequality measures include two classes of decomposable indices: the sub-population decomposable indices and the income source decomposable indices. The first yields a part of the overall inequality to the between-group inequalities and to the within-group inequalities. The second attributes to each factor of income (labour income, capital income, social taxes, etc.) a part of the total inequality. The literature shows that all the indices of inequality belong exclusively to one decomposable domain. This article aims at demonstrating that many measures can be constructed on the basis of the simultaneity between the families of decomposable indices: the multi-decomposable inequality measures.
Key-words: Entropy, Gini, Income source decomposition, Multi-decomposition, Subgroup decomposition.
JEL Classification: D63, D31.

---

* LAMETA, Université de Montpellier I, Avenue de la mer, Site de Richter, CS 79606 - 34960 Montpellier Cedex 2 ; Tel : 33(0)4.67.15.84.20, Fax : 33(0)4.67.15.84.67, E-mail : s-mussard@lameta.univ-montp1.fr
Cette recherche est une extension des travaux présentés aux journées du SESAME (2003) et à l'institut mondial pour la recherche en économie du développement de l'Université des Nations Unies (WIDER 2003). Les auteurs remercient le Professeur Camilo Dagum et le Professeur Jacques Silber pour leurs commentaires sur une version antérieure à ce papier.

I. Introduction

La mesure des inégalités du revenu est un domaine non négligeable de l'économie publique. Elle provient de la théorie de la répartition du revenu qui distingue la répartition fonctionnelle du revenu et la répartition personnelle du revenu.

La répartition fonctionnelle du revenu étudie la formation des prix, le rôle des facteurs de production dans la production totale et l'allocation du revenu aux propriétaires de chaque catégorie de facteurs. Elle permet donc de déterminer la part du revenu national imputée à chaque catégorie de facteurs de production.

La répartition personnelle du revenu analyse la répartition du revenu total entre les unités économiques (famille, ménage, individus, etc.). Elle met aussi l'accent sur les sources de revenu de chaque entité telles que le salaire, les primes, le profit, les taxes, etc., et repose sur la propriété privée des ressources initiales.

La formulation de propriétés axiomatiques concernant les mesures d'inégalité permet de sélectionner de façon pertinente une mesure d'inégalité. Elle constitue aussi un mécanisme de sélection des indicateurs susceptibles de répondre aux choix des utilisateurs, et autorise la construction de nouvelles classes de mesures en synthétisant plusieurs axiomes. On recense par exemple la classe des indices centristes [Kolm (1976a, 1976b)] issue d'un compromis entre l'ensemble des mesures absolues (homogènes de degré un) et relatives (homogènes de degré zéro), comme celle des indices d'inégalité intermédiaires [Bossert et Pfingsten (1990)] qui intègre, comme cas particulier, les indices relatifs et absolus.

En 1967, Theil s'interroge sur la notion de décomposabilité des mesures d'inégalité en sous-populations. Pour décomposer un indicateur en sous-groupes, il est nécessaire que la population globale P soit divisée en plusieurs groupes (par exemple hommes et femmes, catégories socioprofessionnelles, régions, groupes d'âge, etc.). La finalité d'une telle décomposition est d'expliquer les inégalités de revenu par le degré d'implication des différents groupes composant P. Est-ce qu'un groupe participe plus qu'un autre à l'explication des inégalités ? Est-ce que les inégalités proviennent des différences de revenu à l'intérieur des groupes ou des différences de revenu entre les groupes ?

La technique de décomposition en sources de revenu atteint le même objectif en identifiant les sources qui tendent à accroître les inégalités. Pour mieux comprendre l'objectif de ces deux méthodes, considérons le tableau 1 suivant.

Tableau 1

Sources → Groupes ↓	**Salaires**	**Primes**	**Taxes**	**Total**
Inégalités issues des hommes	×	×	×	30%
Inégalités issues des femmes	×	×	×	20%
Inégalités entre hommes et femmes	×	×	×	50%
Total	80%	10%	10%	100%

Lorsque la population *P* est partitionnée en deux groupes, hommes et femmes, la décomposition en sous-groupes met en évidence la participation des hommes à l'inégalité totale (30%), la participation des femmes à l'inégalité totale (20%), et la contribution des inégalités entre les hommes et les femmes à l'inégalité totale (50%). De manière analogue, la décomposition en sources de revenu indique la contribution des inégalités salariales à l'inégalité totale (80%), la contribution des primes à l'inégalité totale (10%), et la contribution des taxes à l'inégalité totale (10%). La décomposition de la structure des inégalités révèle le lien entre l'analyse statistique des inégalités et le rôle des politiques économiques de redistribution. L'utilisation de ces deux approches permet, par exemple, de tester et de simuler l'impact du changement des politiques fiscales sur les inégalités de revenu inhérentes aux groupes et aux sources de revenu.

Cependant, on constate qu'en simulant par exemple l'effet d'une politique fiscale, il n'est pas possible de connaître l'influence de la source « taxes » qui s'exerce sur les inégalités entre les groupes ou à l'intérieur des groupes, d'où la présence des « × » à l'intérieur du tableau 1. En d'autres termes, est-ce que les taxes engendrées par une nouvelle politique fiscale vont entraîner de moindres inégalités intergroupes (entre les hommes et les femmes) ou au contraire vont-elles augmenter les inégalités intragroupes (au sein du groupe masculin ou du groupe féminin) ?

Les techniques de décomposition qui combinent la décomposition en sous-populations et la décomposition en sources de revenu (facteurs) sont une réponse à ces types de questions. Elles fournissent une explication aux inégalités qui s'exercent à l'intérieur des groupes et entre les groupes par les changements de la structure du revenu. En remplissant les cases manquantes du tableau 1, on peut raisonnablement espérer que le lien unissant les politiques économiques et les inégalités soit davantage précisé.

La lecture de la littérature concernant les mesures d'inégalités décomposables nous conduit aux solutions du problème lié au « no-bridge » entre les deux techniques de décomposition. Elle nous suggère de construire des familles d'indicateurs multi-décomposables. L'approche axiomatique retenue accroît notre compréhension des motivations sous-jacentes aux problèmes de la mesure des inégalités (Section II). Nous orientons ensuite la recherche vers la propriété de décomposition cohérente en sous-groupes, qui est à l'heure actuelle, la référence incontournable en matière de décomposabilité (Section III). Elle conduit à adopter un type de mesures multi-décomposables. Cependant, la remise en cause de cette propriété de décomposabilité cohérente en sous-groupes conduit à élaborer d'autres indices multi-décomposables, combinant la décomposition en sous-groupes et la décomposition en sources de revenu (Section IV) que nous illustrons sur les revenus italiens de 2000 (Section V).

II. Les propriétés axiomatiques des mesures d'inégalité[1]

Lest travaux de Dalton (1920), Kolm (1976a, 1976b), Shorrocks (1980) et Chakravarty (1999)[2] ont conduit les chercheurs à adopter quatre propriétés usuelles permettant de définir les mesures d'inégalité.

Soit I un indice d'inégalité, défini par $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}$ (où $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{N}$ sont respectivement l'ensemble des réels de dimension n, l'ensemble des réels non négatifs et l'ensemble des entiers naturels).

Le principe de transfert de Pigou-Dalton (PD). *Soit une distribution de revenu x obtenue à partir d'une distribution y où l'on effectue un transfert de revenu progressif,*

[1] Les propriétés standards de l'approche axiomatique des mesures d'inégalité, présentées dans cette section, font références aux notations de Chakravarty (1999) et Blackorby, Bossert, Donaldson (1999).

[2] Les travaux axiomatiques de Chakravarty sont antérieurs à 1999, mais son article de 1999 (cf. « Handbook of Income Inequality Measurement ») est une revue plus complète de la littérature.

autrement dit d'une personne possédant un certain niveau de revenu vers une personne dont le niveau de revenu est plus faible :

$$I(x) < I(y). \qquad \text{(PD)}$$

Les transferts de revenu vers les individus les moins biens lotis font diminuer l'inégalité totale.

Le principe de population de Dalton (PP). *Pour une distribution x concaténée*[3] *k fois, la mesure d'inégalité reste inchangée* :

$$I\left(x^{(k)}\right) = I(x), \forall\, k \geq 2. \qquad \text{(PP)}$$

Ce critère permet de comparer des indices mesurés sur des distributions de revenu dont les tailles sont différentes.

L'anonymat ou la symétrie (SM). *Elle désigne la propriété d'un indice I qui est une fonction symétrique de ses arguments. Un indice qui est invariant après l'introduction d'une perturbation dans la distribution des revenus permet à chaque individu de conserver son anonymat. Par exemple, si x est obtenue à partir de y par une permutation quelconque des revenus, alors* :

$$I(x) = I(y). \qquad \text{(SM)}$$

La normalisation (NM). *Il s'agit de la condition selon laquelle les indices d'inégalité prennent la valeur* 0 *pour des distributions égalitaires* (*autrement dit lorsque les individus possèdent tous le même revenu*) :

$$I\left(k1^n\right) = 0, \forall\, k > 0, \qquad \text{(NM)}$$

où 1^n *est le vecteur de dimension n dont les éléments sont tous égaux à la valeur* 1.

Les axiomes PD, PP, SM et NM définissent l'ensemble des indices réguliers.

[3] Soit un vecteur $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. La concaténation d'ordre k consiste à répliquer le vecteur k fois : $x^{(k)} = \{ \overbrace{x_1,\ldots,x_1}^{k \text{ fois}}, \ldots, \overbrace{x_n,\ldots,x_n}^{k \text{ fois}} \}$.

L'invariance relative (IR). *La propriété d'invariance relative est l'homogénéité de degré zéro d'une fonction* :

$$I(\lambda x) = I(x),\ \forall \lambda > 0. \tag{IR}$$

Cette propriété évite l'utilisation de déflateurs. Il n'est donc pas nécessaire de corriger les revenus de l'inflation ou de convertir les revenus dans une devise particulière, car la valeur de l'indice reste inchangée.

Pour présenter la notion de décomposabilité en sous-groupes, Shorrocks (1980, 1984, 1988) définit le concept de décomposabilité additive et celui de décomposition cohérente en sous-populations. Soit une population mère P, dont la moyenne des revenus est μ, divisée en k groupes P_j de moyenne μ_j (j=1,…, k). Soit p_j le pourcentage d'individus appartenant au groupe P_j et s_j le pourcentage moyen des revenus issus de P_j :

$$p_j = \frac{n_j}{n},\ s_j = \frac{n_j\,\mu_j}{n\,\mu}. \tag{1}$$

La décomposabilité additive (DA) [Shorrocks (1980)]. *Elle définit la décomposition en sous-groupes comme la somme de deux composantes, une inégalité intragroupe et une inégalité intergroupe* :

$$I = I_W + I_B, \tag{DA}$$

où $I_W = \sum_{j=1}^{k} w_j(\mu, n) I_j(x_j)$

et $I_B = I(\mu_1, ..., \mu_k)$.

$I_j(x_j)$ représente l'indice d'inégalité mesuré sur la distribution de revenu x_j du groupe P_j, w_j le poids associé à l'indicateur I_j (p_j, s_j, ou une combinaison des deux) I_W la contribution des inégalités intragroupes à l'inégalité totale et I_B la contribution des inégalités intergroupes à l'inégalité totale. L'inégalité intragroupe I_W est une moyenne pondérée des inégalités à l'intérieur des groupes. L'inégalité intergroupe I_B représente les inégalités entre les revenus moyens μ_j des k sous-populations [cf. aussi Bourguignon (1979)].

La décomposition cohérente en sous-populations [Shorrocks (1984, 1988)]. *Une mesure d'inégalité I satisfait la propriété de décomposition cohérente en sous-groupes si* :

$$I = f\left(I_1,..., I_j,..., I_k\,;\, p_1,..., p_j,..., p_k\,;\, s_1,..., s_j,..., s_k\right), \tag{2}$$

où f est une fonction croissante de ses k premiers arguments.

Supposons que les revenus du groupe P_j se modifient, les revenus moyens et les tailles de chaque sous-population P_j restant constants. Si les inégalités augmentent (diminuent) au sein du groupe P_j, alors l'inégalité totale augmente (diminue). Par conséquent, pour les mesures non cohérentes, on peut obtenir la situation particulière selon laquelle les inégalités s'accroissent à l'intérieur de chaque groupe P_j alors que l'inégalité totale diminue.

La décomposabilité additive (DA) est fortement liée au concept de décomposition cohérente. Les inégalités entre les groupes I_B sont uniquement dépendantes des moyennes des revenus de chaque groupe P_j. Si l'inégalité augmente au sein de chaque groupe, au total, l'inégalité intragroupe I_W est en hausse. Par ailleurs, l'inégalité intergroupe reste constante si les moyennes des sous-groupes sont invariables. En définitive, l'inégalité totale augmente (diminue) car la hausse (baisse) de l'inégalité intragroupe « l'emporte » sur la variation nulle de l'inégalité intergroupe.

Théorème 1 [Shorrocks (1980)]. *L'indice d'inégalité I* (*possédant des dérivées secondes continues*) *satisfait l'axiome d'invariance IR et les axiomes PD, PP, SM, NM et DA si et seulement si* (*ssi*) *I est un multiple positif de l'entropie généralisée S_c définie par*,

$$S_c = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\left((x_i/\mu)^c - 1\right)}{nc\,(c-1)} \;, \forall c > 1 \\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} log \dfrac{\mu}{x_i} \;, \forall c = 0 \\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{\mu} log \dfrac{x_i}{\mu} \;, \forall c = 1, \end{cases} \tag{3}$$

où x_i représente le revenu de l'individu i.

Les travaux de Shorrocks (1980) conduisent donc à la construction de la mesure de l'entropie généralisée qui est un indicateur régulier, homogène de degré zéro, et additivement décomposable en sous-groupes.[4]

Théorème 2 [Ebert (1988)]. *I est défini sur l'ensemble des distributions classées par ordre non décroissant et satisfait l'invariance IR, PD, PP, NM, la différentiabilité et la décomposabilité additive DA pour des distributions qui ne se chevauchent pas ssi I est l'indice de Gini, G, ou l'entropie généralisée S_c* :

$$G = \sum_{i=1}^{n} \left[(2i-1) / n^2 \right] \left[(x_i / \mu) - 1 \right]. \tag{4}$$

Ebert montre que l'indicateur de Gini est aussi une mesure régulière, homogène de degré zéro, et additivement décomposable lorsque les distributions ne se chevauchent pas. En effet, si les distributions de revenu des différents groupes se chevauchent, la mesure de Gini décomposée fait apparaître un troisième terme qui évalue les inégalités provenant de la zone de chevauchement [confère par exemple Pyatt (1976), Silber (1989), Dagum (1997a, 1997b)]. Ce troisième terme a longtemps exclu l'indicateur de Gini de la famille des indicateurs décomposables en sous-groupes. Il fut d'abord nommé « terme d'interaction » [Mookherjee et Shorrocks (1982)], car la pertinence de cette inégalité particulière était incomprise. Dagum (1997a, 1997b) démontre qu'elle provient de la « transvariation » (définie par Gini en 1916) qu'il a développée en 1959, 1960 et 1961.

En définitive, deux mesures régulières, homogènes de degré zéro, et décomposables en sous-groupes ont retenu l'attention des économistes. De nombreuses applications ont aussi été menées afin d'expliquer l'évolution de la structure par groupe des inégalités de revenu[5] sans qu'une réponse suffisante ait été fournie sur la différence qui prévaut entre les mesures additivement décomposables (l'entropie) et les mesures qui ne satisfont pas ce principe (Gini).

---

[4] Cf. les travaux de Cowell (1980a, 1980b) qui trouve une famille de mesures équivalente à celle de l'entropie généralisée.

[5] Cf. par exemple Jenkis (1995) pour l'entropie et Dagum (1997a, 1997b) pour la mesure de Gini.

III. La décomposabilité en sous-groupes : un nouvel examen

La mesure de l'entropie est souvent préférée à celle de Gini en raison de la monotonie et de la cohérence en sous-groupes. Elle permet une analyse simple des inégalités en sous-groupes. En effet, si les inégalités augmentent (diminuent) au sein de certains groupes, toutes choses étant égales par ailleurs, l'inégalité totale augmente (diminue). Il est cependant légitime de penser que les inégalités suivent une logique bien plus complexe. Un relâchement de la condition de monotonie permet d'envisager le cas selon lequel l'inégalité totale diminue (augmente) même si les inégalités à l'intérieur des groupes augmentent (diminuent). Il suffit pour cela que le montant des inégalités intergroupes « l'emporte » sur celui des inégalités intragroupes.

Illustrons ce propos à l'aide de l'exemple de Cowell (1988, p. 310) sur l'indice de Gini. A la période T1, la distribution de revenu globale est donnée par $x = (x_1, x_2)$ où $x_1 =$ (1,6,12) est la distribution du groupe 1, et x_2 = (6,6,9) celle du groupe 2. En T2, la distribution devient $y = (y_1, y_2)$ où y_1 = (3,3,13) et y_2 = (6,7,8). Les moyennes et les tailles des sous-populations sont constantes (les proportions s_j et p_j aussi). Entre T1 et T2, l'indice de Gini de chaque sous-groupe diminue : 0,385 $\rightarrow$ 0,351 pour le groupe 1 ; 0,095 $\rightarrow$ 0,063 pour le groupe 2. Au contraire, l'indice global augmente : 0,266 $\rightarrow$ 0,275, à cause de l'intensité de transvariation. Le deuxième élément de l'indice décomposé de Gini, la mesure de Gini nette intergroupe, mesure les inégalités moyennes entre les groupes, au même titre que l'indicateur intergroupe de l'entropie décomposée. La mesure de Gini nette intergroupe est donc neutre car les moyennes sont constantes entre T1 et T2. Le troisième terme mesure la « dépression » (ou l'exclusion) qui émane des sous-groupes les mieux lotis (ceux dont la moyenne des revenus est élevée). Si les individus du groupe le mieux loti (le groupe 2) peuvent chacun comparer leur revenu à ceux du groupe le moins bien lotis (le groupe 1), on peut mesurer leur dépression. Ces individus peuvent en effet se sentir exclu du fait que le seul haut revenu du groupe le moins bien loti (le revenu de valeur 12 du groupe 1) crée davantage d'inégalités en T2 qu'en T1. En T2, ce revenu engendre les trois différences suivantes : [13−6]+[13−7]+[13−8] = 18, alors qu'en T1 le montant de ces trois différences était plus faible : [12−6]+[12−6]+[12−9] = 15. C'est cette intensité de transvariation, ce sentiment d'exclusion qui émane des groupes relativement riches, qui explique la hausse de l'inégalité totale.

La mesure de Gini montre que la question de la décomposition des inégalités en sous-groupes est plus complexe qu'avec la simple propriété de décomposition additive. D'après Amartya Sen (1973), cette exclusion est le fruit de comparaisons interpersonnelles. Ces dernières sont permises dès lors qu'un individu a la possibilité de comparer son revenu (ou sa satisfaction, son utilité) à ceux des autres membres de la population, qu'ils appartiennent à son groupe ou non. Il évoque ce propos en ces termes :

« *In any pair-wise comparison the man with the lower income can be thought to be suffering from some depression on finding his income to be lower. Let this depression be proportional to the difference in income. The sum total of all such depressions in all possible pair-wise comparisons takes us to the Gini coefficient*. »

La remarque de Sen montre que l'indice de Gini est construit sur l'ensemble des comparaisons binaires qui mettent en évidence le sentiment d'exclusion émanant de chaque individu. La somme de ces dépressions conduit à la mesure de Gini puisqu'en effet on peut le réécrire en utilisant les différences binaires de revenu :

$$G = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\left|x_i - x_r\right|}{2\mu n^2}. \qquad (5)$$

En 1976, Pyatt reprend l'idée de Sen afin de construire une nouvelle décomposition de la mesure de Gini en relation avec la théorie des jeux. L'indicateur de Gini est associé à un jeu où chaque convive a la possibilité de garder son revenu ou de prendre celui d'une autre personne tirée au hasard dans la population. Cette idée repose aussi sur le concept de comparaisons interpersonnelles des revenus repris en 1998 par Dagum qui montre que les indices dérivés de l'entropie ne satisfont pas cette propriété. Selon l'auteur, l'importance de ce principe est liée au fait que les agents se livrent sans cesse à des comparaisons entre la satisfaction qu'ils retirent d'une situation (par exemple un bien de consommation) et celle que les autres individus possèdent.

Cette propriété normative suggère de privilégier la mesure de Gini. Cependant, le lien avec la notion de décomposabilité en sous-groupes n'est pas formalisé. Pour cela, il est nécessaire de recourir à l'approche de Kolm (1999).

La famille des indices fondés sur les paires [Kolm (1999)]. *Une mesure d'inégalité I est basée sur les paires si* : $I(x) = F[\phi(x_i, x_j)]$, *où* $F(0) = 0$, $F > 0$, ϕ *est symétrique*, $\phi(\xi,\xi) = 0$, et $\phi > 0$ *dans les autres cas*.

Cette famille d'indicateurs permet de comparer tous les couples d'individus et satisfait donc au critère de comparaisons interpersonnelles (chaque individu peut se comparer avec tous les autres membres de la population). Toutefois, la notion de décomposabilité n'apparaît pas. On peut alors utiliser une autre famille de mesures plus restreinte basée sur les paires :

$$I(y) = F[\Sigma_{i<j} f(\phi(x_i, x_j))], \quad (6)$$

où $F(0) = f(0) = 0$ et où F est croissante.

En supposant que f est séparable, on obtient une nouvelle forme de décomposabilité en sous-groupes puisqu'il est permis de regrouper d'une part les comparaisons interpersonnelles [qui sont les $\phi(x_i, x_j)$] issues d'un même groupe et d'autre part les comparaisons interpersonnelles issues de deux groupes différents.

En définitive, les travaux de Gini (1916), Dagum (1959, 1960, 1961, 1998), Sen (1973), Pyatt (1976), et Kolm (1999) suggèrent la création d'une nouvelle forme de décomposabilité en sous-groupes appelée : la décomposition en sous-groupes basée sur les comparaisons interpersonnelles.

La décomposition en sous-groupes basée sur les comparaisons interpersonnelles. *Une mesure d'inégalité satisfait la propriété de décomposabilité basée sur les comparaisons interpersonnelles si la mesure intragroupe regroupe toutes les comparaisons interpersonnelles qui existent à l'intérieur des groupes et si la mesure intergroupe inclut toutes les comparaisons interpersonnelles possibles entre toutes les paires de groupes*.

Cette propriété permet de déboucher sur une nouvelle approche dans la définition de l'inégalité intergroupe. Elle ne relève plus des différences moyennes qui existent entre les groupes mais des inégalités entre les revenus des individus qui appartiennent à des groupes différents. Comme le souligne Dagum (1997a), les indicateurs de mesure d'inégalité dont les composantes intergroupes sont uniquement fonction des moyennes des sous-groupes ne peuvent pas tenir compte des phénomènes d'asymétrie et de variance puisque tout se passe comme si les sous-groupes étaient normalement et également distribués, de même variance, et statistiquement indépendants. Par souci de différenciation, nous nommons celles qui sont basées sur les comparaisons interpersonnelles : les mesures d'inégalité « brutes intergroupes ».

IV. Une solution au problème du « no-bridge » : la multi-décomposabilité

La décomposition en sous-populations [Theil (1967), Bhattacharya et Mahalanobis (1967)] est apparue peu de temps avant la méthode de décomposition en sources de revenu. En 1969, Rao propose une nouvelle méthode de décomposition permettant de connaître l'influence des différentes sources de revenu sur le montant de l'inégalité totale. Il propose ainsi une décomposition de la mesure de Gini en facteurs. Cette approche est ensuite prolongée par Fei *et alii* (1978), Shorrocks (1982, 1983, 1999) et Silber (1989, 1993).

En France, Trannoy en collaboration avec Auvray (1992) puis avec Sastres (2002) a tenté de généraliser cette technique. Il a montré que la valeur de Shapley, outil de la théorie des jeux coopératifs, permettait de décomposer les mesures d'inégalité en sources de revenu et donc de mesurer les contributions de chaque facteur de rémunération (revenu du travail, revenu du capital, taxes, etc.) à l'inégalité globale.

En 1999, Tsui propose une version multidimensionnelle de l'entropie. Elle permet de mesurer les inégalités en tenant compte simultanément de plusieurs dimensions, telles que le niveau de revenu, le niveau d'éducation, le niveau de santé, etc., et dont la portée peut dépasser les simples sources de rémunération. L'auteur montre que cet indice satisfait de surcroît la cohérence en sous-groupes, mais ne met pas en évidence la structure multi-décomposable de son indicateur. Pourtant, un cas particulier de sa mesure permet d'atteindre le critère de multi-décomposabilité [cf. annexe 2]. Il est en effet possible de mesurer l'influence et la contribution de chaque dimension sur la valeur des inégalités intragroupes et celles des inégalités intergroupes afin de déterminer les valeurs manquantes du tableau 1. Par conséquent, cette mesure combine des dimensions importantes en matière de politiques économiques (santé, éducation, protection sociale, etc.) afin d'en évaluer l'efficacité, de savoir si les inégalités sont engendrées par une dimension particulière ou encore si les inégalités s'exercent à l'intérieur des groupes ou entre les groupes.

Cette mesure multidimensionnelle multi-décomposable n'échappe cependant pas aux critiques énoncées précédemment. Il subsiste des doutes sur la logique de la propriété de décomposition cohérente en sous-groupes, qui implique des sous-populations dont les caractéristiques obéissent à des lois normales de même variance et statiquement indépendantes.

Afin de contourner ces critiques, on peut utiliser la famille des mesures d'inégalité décomposables en sous-populations par les comparaisons interpersonnelles [équation (6)]. En effet, imposons une forme fonctionnelle à cette famille, choisie de telle sorte qu'elle permette d'obtenir facilement l'indicateur de Gini, dont nous savons qu'il est une mesure régulière et homogène de degré zéro :

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} \frac{|x_i - x_r|}{f(x)}, \ \forall f(x) \neq 0 . \tag{7}$$

Au numérateur apparaissent les inégalités de revenu entre chaque paire d'individus. Le dénominateur est construit afin de normaliser la mesure [cf. Ebert (1999)]. Pour des formes diverses de *f*, on obtient :

$$g(x) = \begin{cases} G(x) \text{ si } f(x) = 2\mu n^2 \\ GMR(x) \text{ si } f(x) = n^2 \max\{x_i, x_r\} \\ GMD(x) \text{ si } f(x) = n^2, \end{cases} \tag{8}$$

où *GMR* est le rapport moyen de Gini [cf. Mussard (2004)] et où *GMD* est la différence moyenne de Gini [cf. Gini (1912)]. Lorsque deux individus i et r (tel que $x_i < x_r$) sont tirés au hasard de la population globale P (avec remise), la différence moyenne de Gini mesure la différence de revenu espérée entre ces deux personnes. Le rapport moyen de Gini permet d'évaluer la part de revenu espérée de r (en pourcentage) qui est détenue par i.[6]

Le point commun relatif à ces trois mesures provient de la décomposabilité en sous-groupes. Lorsque la population mère P est partitionnée en k sous-groupes (j=1,…, k), on mesure la composante intragroupe $g(x)_w$ en regroupant les comparaisons

[6] La mesure *GMR* satisfait NM, PP, SM, IR, une version restreinte de l'axiome de Pigou-Dalton et une version plus faible du principe de transfert issu du quasi-ordre différentiel relatif. La mesure *GMD* satisfait NM, SM, et PD.

interpersonnelles à l'intérieur des groupes, et la mesure intergroupe brute $g(x)_{gb}$ en regroupant les comparaisons interpersonnelles entre chaque paire de groupes :

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{|x_i - x_r|}{f(x)} = \underbrace{\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{r=1}^{n_j}\frac{|x_{ij} - x_{rj}|}{f(x)}}_{g(x)_w} + \underbrace{2\sum_{j=2}^{k}\sum_{h=1}^{j-1}\sum_{r=1}^{n_h}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{|x_{ij} - x_{rh}|}{f(x)}}_{g(x)_{gb}}, \tag{9}$$

où x_{ij} est le revenu de l'individu i appartenant au groupe j. Comme l'indique le tableau 1, ce type de ratio permet par exemple de mesurer les inégalités provenant du groupe des hommes, du groupe des femmes, et les inégalités entre les hommes et les femmes.

Pour unifier la décomposition en sous-groupes et la décomposition en sources de revenu, il suffit de mettre en évidence les sources de rémunération. Chaque individu possède au total q sources de revenu dont la somme fournit le revenu global. Le revenu de l'individu i se décompose de la manière suivante :

$$x_i = \sum_{m=1}^{q} x_i^m . \tag{10}$$

On obtient alors :

$$g(x) = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{r=1}^{n_j}\frac{\left|\sum_{m=1}^{q} x_{ij}^m - \sum_{m=1}^{q} x_{rj}^m\right|}{f(x)} + 2\sum_{j=2}^{k}\sum_{h=1}^{j-1}\sum_{r=1}^{n_h}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{\left|\sum_{m=1}^{q} x_{ij}^m - \sum_{m=1}^{q} x_{rh}^m\right|}{f(x)} . \tag{11}$$

En supprimant la valeur absolue par la formule $|a-b| = a+b-2\min\{a, b\}$[7], on a :

$$\boxed{\begin{aligned} g(x) = {} & \left.\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{r=1}^{n_j}\frac{\sum_{m=1}^{q} x_{ij}^m + \sum_{m=1}^{q} x_{rj}^m - 2\min\left\{\sum_{m=1}^{q} x_{ij}^m\,,\ \sum_{m=1}^{q} x_{rj}^m\right\}}{f(x)}\right\} g(x)_w \\ & \left.+ 2\sum_{j=2}^{k}\sum_{h=1}^{j-1}\sum_{r=1}^{n_h}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{\sum_{m=1}^{q} x_{ij}^m + \sum_{m=1}^{q} x_{rh}^m - 2\min\left\{\sum_{m=1}^{q} x_{ij}^m\,,\ \sum_{m=1}^{q} x_{rh}^m\right\}}{f(x)}\right\} g(x)_{gb} . \end{aligned}} \tag{12}$$

[7] D'autres formules équivalentes peuvent être utilisées afin d'obtenir le même résultat comme $|a-b| = \max\{a, b\} - \min\{a, b\}$.

Avec les propriétés d'associativité et de commutativité de l'addition, il est possible de regrouper toutes les sources de revenu qui sont de même nature. On peut ainsi isoler le facteur salaire afin de mesurer sa contribution aux inégalités intragroupes (par exemple aux inégalités masculines et aux inégalités féminines) et sa contribution aux inégalités intergroupes brutes (entre les hommes et les femmes). En isolant l'effet de toutes les sources de rémunération, on obtient au total une mesure d'inégalité multi-décomposable qui permet le calcul de tous les couples générateurs d'inégalités tels que « source m / groupe j » et « source m / entre les groupes j et h ».

L'équation (12) est une solution au problème du « no-bridge » pour les mesures de Gini, *GMR* et *GMD*. La fonction f permet de généraliser ce résultat à d'autres indicateurs encore inconnus.[8] La mesure d'inégalité $g(x)$, qui généralise la technique à trois indicateurs, n'est pas une solution unique. En revanche, on constate que la mesure de l'entropie unidimensionnelle S_c [Shorrocks (1980)] ne permet pas d'atteindre la propriété de multi-décomposabilité [confère annexe 1]. En effet, des termes redondants (comme des termes multiplicatifs entre deux sources de revenu) ou des termes non décomposables (comme le logarithme d'une somme) ne permettent pas de mesurer la contribution d'une source particulière au montant des inégalités intragroupes et intergroupes.

V. Illustration sur les revenus italiens de 2000

Nous proposons, à titre d'exemple, d'analyser les disparités de revenu italiennes en utilisant la multi-décomposition de la mesure de Gini[9]. L'Italie est partitionnée en trois régions : Nord, Centre, Sud, où le Sud inclut aussi les îles telles que la Sicile. L'échantillon retenu est issu de la Banque d'Italie : « Survey on Household's Income and Wealth » et concerne l'année 2000. Il comprend 14360 individus (cf. tableau 2).

L'analyse est menée sur sept sources de revenu : (A) les salaires nets ; (B) les primes et autres avantages divers ; (C) pensions et arriérés ; (D) transferts (aide à la scolarité et pensions alimentaires) ; (E) revenus nets provenant de sa propre entreprise (entrepreneurs) ; (F) revenus immobiliers ; (G) revenus financiers.

---

[8] Cette solution (12) n'aborde pas les possibilités de décomposition en trois éléments. On pourrait en effet décomposer la mesure brute intergroupe afin d'obtenir la mesure des inégalités moyennes entre les groupes et l'intensité de transvariation. On obtient alors des indicateurs multi-décomposables munis de trois composantes.

[9] Confère Mussard (2004).

TABLEAU 2. DESCRIPTION DES REVENUS ITALIENS PAR REGION EN 2000**

Régions → Indices ↓	Nord	Centre	Sud - îles	Total
Individus n_i	6540	3035	4679	**14254**
Moyenne €	17325,65	15224,08	12643,93	**15341,36**
Ecart-type €	16052,85	14011,90	11159,05	**14321,76**
Moyenne source A	6643,38	5741,56	5043,19	**5809,38**
Moyenne source B	86,08	32,43	31,47	**49,99**
Moyenne source C	3823,35	3614,73	3198,97	**3545,68**
Moyenne source D	96,55	84,05	124,12	**101,57**
Moyenne source E	2552,93	2194,27	1888,27	**2211,82**
Moyenne source F	3407,48	3099,90	2150,06	**2885,81**
Moyenne source G	715,88	457,13	207,85	**460,29**

** *Source : Banque d'Italie* « *Survey on Household's Income and Wealth 2000* »

Les statistiques du tableau 2 sont annuelles.[10] Le revenu annuel total de l'individu correspond à son revenu disponible net puisque les transferts sont comptabilisés.

On constate que la multi-décomposition permet d'identifier les sources de revenu qui accroissent les inégalités. En 2000, les salaires expliquent 43,3% de l'inégalité totale. En revanche, la structure des inégalités montre que ces dernières ont tendance à s'exercer entre les groupes. Les inégalités entre le Nord et le Sud (entre la région la plus industrialisée et la plus agricole) expliquent 30,46% de l'inégalité totale.

En combinant les deux plus fortes contributions « marginales » en facteurs et en sous-groupes, on vérifie que le couple « Salaire / Nord-Sud » possède la plus forte contribution de l'inégalité totale avec 10,82%. Cependant, la multi-décomposition ne procure pas forcément le même résultat que les croisements des décompositions marginales. Par exemple, le croisement des contributions les plus faibles ne donne pas la combinaison « source / groupe » la plus faible. Les inégalités de la région Centre s'élèvent à 4,37% de l'inégalité totale. Les transferts représentent le facteur le plus faible puisqu'il permet de diminuer les inégalités globales de l'ordre de 0,08%. Pourtant le croisement de ces deux contributions ne fournit pas le couple le plus faible, car les transferts de la région Centre expliquent 0% de l'inégalité totale. En revanche, les transferts entre le Nord et le Sud permettent de diminuer les inégalités de 0,08%.

[10] Les revenus en Lires ont été sont transformés en Euros par le taux : 1 Euro ≅ 1936,27 Lires italiennes. La mesure de Gini est homogène de degré zéro. La conversion n'a donc aucune incidence sur les résultats.

La technique de la multi-décomposition permet d'éviter des erreurs de politiques économiques. Les preneurs de décision ne doivent pas, dans ce cas précis, se focaliser uniquement sur les combinaisons que donnent la décomposition en sous-groupes et la décomposition en sources de revenu. La multi-décomposition évite ces contresens tout en déterminant de manière plus claire et plus précise les combinaisons qui expliquent l'inégalité totale.

TABLEAU 3. MULTI-DECOMPOSITION DE GINI : ITALIE 2000**

Sources→ Indices ↓	A Salaires	B Primes	C Pensions	D Transferts	E R. Entrep.	F Immobiliers	G Financiers	Total Groupes
Inégalités Nord	0,0261 [6,77]	0,0007 [0,18]	0,0083 [2,15]	0 [0]	0,0213 [5,52]	0,0257 [6,67]	0,0077 [2]	0,0898 [23,29]
Inégalités Centre	0,0051 [1,32]	0,0001 [0,03]	0,0016 [0,42]	0 [0]	0,0038 [0,99]	0,0051 [1,32]	0,0011 [0,29]	0,0168 [4,37]
Inégalités Sud	0,0146 [3,79]	0,0001 [0,03]	0,0042 [1,09]	0 [0]	0,0078 [2,02]	0,0067 [1,74]	0,0011 [0,29]	0,0345 [8,96]
Inégalités Nord / Centre	0,0235 [6,10]	0,0004 [0,1]	0,0073 [1,89]	0,0001 [0,03]	0,0181 [4,70]	0,0228 [5,9]	0,0058 [1,50]	0,0780 [20,22]
Inégalités Nord / Sud	**0,0417 [10,82]**	0,0008 [0,21]	0,0126 [3,27]	-0,0003 [-0,08]	0,0263 [6,82]	0,0288 [7,47]	0,0075 [1,95]	**0,1174 [30,46]**
Inégalités Centre / Sud	0,0178 [4,62]	0,0002 [0,05]	0,0053 [1,37]	-0,0001 [-0,03]	0,0109 [2,83]	0,0125 [3,24]	0,0024 [0,62]	0,0490 [12,70]
Total Sources	**0,1288 [33,42]**	0,0023 [0,60]	0,0393 [10,19]	-0,0003 [-0,08]	0,0882 [22,88]	0,1016 [26,34]	0,0256 [6,65]	***G* ≃ 0,3855**

*** Source : Banque d'Italie « Survey on Household's Income and Wealth 2000 »*

Enfin, la technique permet aux décideurs de réaliser en laboratoire des tests et des simulations de politiques économiques. Par exemple, même si globalement les transferts diminuent les inégalités globales (-0,08%), on s'aperçoit que les transferts entre le Nord et le Centre augmentent les inégalités totales à hauteur de 0,03%. La multi-décomposabilité permet ainsi d'identifier et de prévoir les combinaisons qui tendent à augmenter les inégalités totales.

VI. Conclusion

Les mesures de l'entropie font souvent office de référence dans le domaine des mesures d'inégalité décomposables. L'entropie unidimensionnelle généralisée *Sc* [Shorrocks (1980)] a été longtemps retenue car elle respecte le principe de décomposition cohérente. Cependant, l'entropie multidimensionnelle de Tsui (1999), dotée du même principe, et de celui de multi-décomposition, est devenue plus appréciable du fait que les dimensions qui peuvent expliquer les inégalités intragroupes et intergroupes ne sont pas limitées aux seules sources de revenu. Ces indices ne peuvent pas néanmoins être considérés comme de bonnes mesures décomposables en raison des incertitudes évoquées dans la section III concernant la propriété de décomposition cohérente. De plus, l'entropie généralisée unidimensionnelle, S_c, n'est pas une mesure multi-décomposable.

Le coefficient de Gini est au contraire une mesure multi-décomposable. Il lie la décomposition en sous-groupes et la décomposition en sources de revenu. Même si le revenu est uniquement déterminé par les dimensions que représentent les sources de rémunération, la mesure de Gini intergroupe (brute) est plus satisfaisante, car elle prend en compte les phénomènes de variance et d'asymétrie entre les groupes.

De manière générale, la multi-décomposition permet de tester l'effet des politiques socio-économiques de redistribution en mesurant l'impact des transferts (et d'autres facteurs) aux inégalités intragroupes et intergroupes. Elle est ainsi capable de révéler les contresens des croisements de décompositions marginales en sous-groupes et en sources de revenu.

La multi-décomposabilité offre, enfin, des perspectives de recherche intéressantes comme l'étude de l'inférence statistique de toutes les composantes « source *m* / groupe *j* » et « source *m* / entre les groupes *j* et *h* » qui autoriseraient l'analyse de la significativité des variations des inégalités au cours du temps.

<u>ANNEXE 1 : L'entropie unidimensionnelle n'est pas multi-décomposable</u>

Les mesures intragroupes et intergroupes de l'entropie sont respectivement données par :

$$S_{cw} = \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j \mu_j}{n \mu_j} \left(\frac{\mu_j}{\mu} \right)^c S_{cj} \quad \text{et} \quad S_{cb} = \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j \mu_j}{n \mu_j} \frac{1}{n_j c (c-1)} \sum_{i=1}^{n_j} \left[\left(\frac{\mu_j}{\mu} \right)^c - 1 \right], \qquad (13)$$

telles que S_{cj} est l'entropie mesurée sur la sous-population P_j. La somme des deux composantes nous donne bien la mesure globale de l'entropie :

$$S_c = S_{cw} + S_{cb} . \qquad (14)$$

Etant donné que les sources sont liées de manière additive $x_i = \sum_{m=1}^{q} x_i^m$, les moyennes des sources le sont aussi. La moyenne des revenus du groupe P_j se décompose en effet en la somme des moyennes de chaque facteur : $\mu_j = \sum_{m=1}^{q} \mu_j^m$. Par conséquent, l'inégalité intragroupe devient :

$$S_{cw} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{q} \frac{n_j \mu_j^m}{n \mu_j} \left(\frac{\sum_{m=1}^{q} \mu_j^m}{\sum_{m=1}^{q} \mu^m} \right)^c S_{cj} . \tag{15}$$

Le terme élevé a la puissance c ne permet pas de mesurer la contribution d'une source particulière au montant des inégalités intragroupes. La même remarque peut être faite concernant la mesure intergroupe :

$$S_{cb} = \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{q} \frac{n_j \mu_j^m}{n \mu_j} \frac{1}{c\,(c-1)} \left[\left(\frac{\mu_j}{\mu} \right)^c - 1 \right]. \tag{16}$$

L'entropie unidimensionnelle n'est donc pas multi-décomposable.

<u>ANNEXE 2 : Le cas particulier de multi-décomposabilité de l'entropie multidimensionnelle</u>

Au même titre que l'entropie unidimensionnelle, l'entropie multidimensionnelle de Tsui (1999) donne trois cas particuliers. Seul le troisième est multi-décomposable :

$$F(I(X)) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{m=1}^{q} \delta_m \log \left(\frac{x_i^m}{\mu^m} \right), \forall \delta_m > 0. \tag{17}$$

La multi-décomposition est :

$$F(I(X)) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{m=1}^{q} \delta_m \log \left(\frac{x_{ij}^m}{\mu_j^m} \right) + \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{q} \frac{n_j}{n} \delta_m \log \left(\frac{\mu^m}{\mu_j} \right). \tag{18}$$

<u>ANNEXE 3 : La multi-décomposabilité de la mesure de Gini</u>

Soit l'opérateur $x_{j,ir}^{*m}$ donnant la $m^{\text{ième}}$ source de rémunération issue du minimum entre les revenus x_{ij} et x_{rj} . Soit l'opérateur $x_{jh,ir}^{*m}$ donnant la $m^{\text{ième}}$ source de rémunération issue du minimum entre les revenus x_{ij} et x_{rh}. Dans l'équation (12), on pose $f(x) = 2n^2\mu$, et en regroupant les sources de revenu, on trouve :

$$G(x) = \underbrace{\sum_{m=1}^{q}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{r=1}^{n_j}\frac{x_{ij}^{m}+x_{rj}^{m}-2x_{j,ir}^{*m}}{2\mu n^2}}_{G_w} + \underbrace{2\sum_{m=1}^{q}\sum_{j=2}^{k}\sum_{h=1}^{j-1}\sum_{i=1}^{n_j}\sum_{r=1}^{n_h}\frac{x_{ij}^{m}+x_{rh}^{m}-2x_{jh,ir}^{*m}}{2\mu n^2}}_{G_{gb}} \quad (19)$$

où G_w est la mesure d'inégalité intragroupe et G_{gb} la mesure d'inégalité intergroupe (brute). Aucun terme redondant n'est identifié, la multi-décomposition est donc exacte.

BIBLIOGRAPHIE

Auvray C. et Trannoy A. (1992), « Décomposition par source de l'inégalité des revenus à l'aide de la Valeur Shapley », *Journées de Microéconomie Appliquée*, Sfax, Tunisie.

Bhattacharya N., Mahalanobis B. (1967), « Regional disparities in household consumption in India », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 62, p. 143-161.

Blackorby C., Bossert W., Donaldson D. (1999), « Income Inequality Measurement : The Normative Approach », dans Silber J. (ed.), *Handbook of Income Inequality Measurement*, Kluwer Academic Publishers, p.133-161.

Bossert W., Pfingsten A. (1990), « Intermediate Inequality : Concepts, Indices and Welfare Implication. », *Mathematical Social Science*, vol. 19, p. 117-134.

Bourguignon F. (1979), « Decomposable Inequality Measures », *Econometrica*, vol. 47, p. 901-920.

Chakravarty S.R. (1999), « Measuring Inequality : The Axiomatic Approach », dans Silber J. (ed.), *Handbook of Income Inequality Measurement*, Kluwer Academic Publishers, p.163-186.

Cowell F. A. (1980a), « Generalized entropy and the Measurement of Distributional Change », *European Economic Review*, vol. 13, p. 147-159.

Cowell F. A. (1980b), « On the Structure of Additive Inequality Measures », *Review of Economics Studies*, vol. 47, p. 521-531.

Cowell F. A. (1988), « Inequality Decomposition : Three Bad Measures », *Bulletin of Economic Research*, vol. 40(4), p. 309-312.

Cowell F. A. (2000), « Measurement of Inequality », dans Atkinson A. et Bourguignon F. (ed.), *Hanbook of Income Distribution*.

Dagum C. (1959), *Transvariazione fra più di due distribuzioni*, *In : Gini C.* (*ed.*) *Memorie di metodologia statistica*, Vol II, Libreria Goliardica, Roma.

Dagum C. (1960), « Teoria de la transvariacion, sus aplicaciones a la economia », *Metron*, vol. XX, p. 1-206.

Dagum C. (1961), « Transvariacion en la hipotesis de variables aleatorias normales multidimensionales », *Proceedings of the International Statistical Institute*, vol. 38, Book 4, p. 473-486, Tokyo.

Dagum C. (1980), « Inequality Measures between Income Distributions with Applications », *Econometrica*, vol. 48(7), p. 1791-1803.

Dagum C. (1997a), « A New Approach to the Decomposition of the Gini Income Inequality Ratio », *Empirical Economics*, vol. 22(4), p.515-531.

Dagum C. (1997b), « Decomposition and Interpretation of Gini and the Generalized Entropy Inequality Measures », *Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section, 157th Meeting,* p. 200-205.

Dalton H. (1920), « The Measurement of Inequality of Incomes », *Economic Journal*, vol. 30, p. 348-361.

Ebert U. (1988), « On the Decomposition of Inequality : Partitions into Non-overlapping Subgroups », dans Eichorn W. (ed.), *Measurement In Economics*. New-York : Physica Verlag, p. 399-412.

Ebert U. (1999), « Dual Decomposable Inequality Measures », *Canadian Journal of Economics*, vol. 32(1), p. 234-46.

Fei J. C. H., Ranis G., Kuo S. W. Y. (1978), "Growth and the Family Distribution of Income by Factor Components", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 92, p. 17-53.

Gini C. (1912), « Variabilità e mutabilità », *Memori di Metodologia Statistica*, Vol. 1, *Variabilità e Concentrazione*. Libreria Eredi Virgilio Veschi, Rome, p. 211-382.

Gini C. (1916), « Il concetto di transvariazione e le sue prime applicazioni », *Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica*, In : Gini C (ed.) (1959), p. 21-44.

Kolm S-C. (1976a), « Unequal Inequalities I », *Journal of Economic Theory*, vol. 12, p. 416-442.

Kolm S-C. (1976b), « Unequal Inequalities II », *Journal of Economic Theory*, vol. 13, p. 82-111.

Mookherjee D. et A. Shorrocks (1982), « A Decomposition Analysis of the Trend in UK Income Inequality », *The Economic Journal*, vol. 92, p. 886-902.

Mussard S. (2004), *Décompositions multidimensionnelles du rapport moyen de Gini. Applications aux revenus italiens de 1989 et 2000*, Thèse, Université de Montpellier I.

Rao V.M. (1969), « Two Decompositions of Concentration Ratio », *Journal of the Royal Statistical Society*, Séries A 132, p. 418-425.

Sastre M. et Trannoy A. (2002), « Shapley inequality decomposition by factor components: Some methodological issues », in P. Moyes, C. Seidl and A.F. Shorrocks (ed.), *Inequalities: Theory, Experiments and Applications*, *Journal of Economics*, Supplement 9, p. 51-90.

Shorrocks A. F. (1980), « The Class of Additively Decomposable Inequality Measures », *Econometrica*, vol. 48, p. 613-625.

Shorrocks A. F. (1982), « Inequality Decomposition by factor component », *Econometrica*, vol. 50, p. 193-211.

Shorrocks A. F. (1983), « The impact of Income Component on the Distribution of Family Incomes », *Quarterly Journal of Economics*, p. 311-326.

Shorrocks A. F. (1984), « Inequality Decomposition by Factor Components and by Population Subgroups », *Econometrica*, vol. 53, p. 1369-1386.

Shorrocks A. F. (1988), « Aggregation Issues in Inequality Measurement », In W. Heichhorn (ed.), *Measurement in Economics*, New York, Physica-Verlag, p. 429-452.

Silber J. (1989), « Factor Components, Population Subgroups and the Computation of the Gini Index of Inequality », *Review of Economics and Statistics*, vol. 71, p. 107-115.

Silber J. (1993), « Inequality Decomposition by Income Source : a Note », *Review of Economics and Statistics*, vol. 75(3), p. 545-547

Theil H. (1967), *Economics and Information Theory*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Tsui K. (1999), « Multidimensional inequality and multidimensional generalized entropy measures : An axiomatic derivation », *Social Choice and Welfare*, vol. 16, p. 145-157.