DEA "Economie Mathématique et Econométrie" 1999-2000

Optimisation et Théorie du Contrôle

2ème Partie

On considère le modèle de croissance optimale suivant:

$$
\begin{aligned}
\max_{c(t)} \quad & \int_0^T e^{-\delta t}[c(t)]^\alpha dt \\
s.c. \quad & \dot{k}(t) = rk(t) - c(t) \\
& rk(t) - c(t) \geq 0 \\
& k(0) = k_0, k(T) = k_T \text{ fixés}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

où $c(t)$ est le niveau de consommation de l'agent représentatif, $k(t)$ le stock de capital, $\delta \in (0,1)$ le facteur de préférence pour le présent, $r$ le taux d'intérêt et $\alpha \in (0,1)$.

1) Construire le Hamiltonien et le Lagrangien en valeur courante. Donner les conditions nécessaires d'optimalité.

2) Intégrer le système dynamique obtenu et déterminer les solutions explicites $k^*(t)$, $c^*(t)$ et $q^*(t)$. Distinguer pour ce faire les cas contraint et non contraint.

3) Donner des conditions reliant les paramètres $\delta$ et $r$ d'une part et les conditions initiales et terminale $k_0, k_T$ d'autre part pour que les solutions obtenues précédemment soient admissibles relativement aux contraintes du programme (1). Représenter graphiquement les solutions dans un espace de phases en $(c, k)$. Discuter de l'existence d'une solution optimale selon les valeurs possibles de $T, k_0$ et $k_T$ (cette discussion sera faite en précisant la transition éventuelle entre les cas non contraint et contraint).