Corrigé de l'examen de contrôle 2002-2003.

Pble 1 :

1) $$H = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + q\left[rk - c - \delta k \right]$$

$$\frac{\partial H}{\partial c} = c^{-\sigma} - q = 0$$

$$\dot{q} = \rho q - \frac{\partial H}{\partial k} = \left(\rho + \delta - r\right) q .$$

$$\dot{k} = (r-\delta) k - c$$

2) $$q(t) = q(0)\, e^{-(r-\delta-\rho)t}$$

$$c(t) = q(t)^{-\frac{1}{\sigma}} = q(0)^{-\frac{1}{\sigma}}\, e^{\frac{r-\delta-\rho}{\sigma} t}$$

Donc :

$$\dot{k} - (r-\delta) k = -c = -\, q(0)^{-\frac{1}{\sigma}}\, e^{\frac{r-\delta-\rho}{\sigma} t}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-(r-\delta)t}\left[\dot{k} - (r-\delta) k \right] = -\, q(0)^{-\frac{1}{\sigma}}\, e^{\left[\frac{r-\delta-\rho}{\sigma} - (r-\delta)\right] t}$$

$$= -\, q(0)^{-\frac{1}{\sigma}}\, e^{\frac{(1-\sigma)(r-\delta)-\rho}{\sigma} t}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-(r-\delta)t} k(t) = \frac{\sigma}{\rho - (1-\sigma)(r-\delta)}\, q(0)^{-\frac{1}{\sigma}}\, e^{\frac{(1-\sigma)(r-\delta)-\rho}{\sigma} t} + A$$

$$\Rightarrow \quad k(t) = \frac{\sigma}{\rho - (1-\sigma)(r-\delta)}\, q(0)^{-\frac{1}{\sigma}}\, e^{\frac{r-\delta-\rho}{\sigma} t} + A\, e^{(r-\delta)t}$$

On déduit donc :

$$k_0 = \frac{\sigma}{\rho - (1-\sigma)(r-\delta)}\, q(0)^{-\frac{1}{\sigma}} + A$$

$$k_T = \frac{\sigma}{\rho - (1-\sigma)(r-\delta)}\, q(0)^{-\frac{1}{\sigma}}\, e^{\frac{r-\delta-\rho}{\sigma}T} + A\, e^{(r-\delta)T}$$

D'où :

$$A = k_0 - \frac{\sigma}{\rho-(1-\sigma)(r-\delta)}\, q(0)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

$$\Rightarrow k_T = \frac{\sigma}{\rho-(1-\sigma)(r-\delta)}\, q(0)^{-\frac{1}{\sigma}}\, e^{\frac{r-\delta-\rho}{\sigma}T} + k_0\, e^{(r-\delta)T} - \frac{\sigma}{\rho-(1-\sigma)(r-\delta)}\, q(0)^{-\frac{1}{\sigma}} \times e^{(r-\delta)T}$$

$$\Leftrightarrow k_T - k_0\, e^{(r-\delta)T} = \frac{\sigma}{\rho-(1-\sigma)(r-\delta)}\, q(0)^{-\frac{1}{\sigma}} \left[e^{\frac{r-\delta-\rho}{\sigma}T} - e^{(r-\delta)T} \right]$$

$$\Leftrightarrow k_T\, e^{-(r-\delta)T} - k_0 = \frac{\sigma}{\rho-(1-\sigma)(r-\delta)}\, q(0)^{-\frac{1}{\sigma}} \left[e^{\frac{(r-\delta)(1-\sigma)-\rho}{\sigma}T} - 1 \right]$$

$$\Leftrightarrow k_0 - k_T\, e^{-(r-\delta)T} = \frac{\sigma}{\rho-(1-\sigma)(r-\delta)}\, q(0)^{-\frac{1}{\sigma}} \left[1 - e^{\frac{(r-\delta)(1-\sigma)-\rho}{\sigma}T} \right]$$

Donc :

$$q(0) = \left[\frac{\sigma}{\rho-(1-\sigma)(r-\delta)} \cdot \frac{1 - e^{\frac{(r-\delta)(1-\sigma)-\rho}{\sigma}T}}{k_0 - k_T\, e^{-(r-\delta)T}} \right]^{\sigma}$$

En injectant dans :

$$A = k_0 - \frac{k_0 - k_T\, e^{-(r-\delta)T}}{1 - e^{\frac{(r-\delta)(1-\sigma)-\rho}{\sigma}T}} = \frac{k_T\, e^{-(r-\delta)T} - k_0\, e^{\frac{(r-\delta)(1-\sigma)-\rho}{\sigma}T}}{1 - e^{\frac{(r-\delta)(1-\sigma)-\rho}{\sigma}T}}$$

On obtient finalement,

$$k(t) = \cancel{\frac{\sigma}{\rho - (1-\sigma)(r-\delta)}} \; \cancel{\frac{\rho - (1-\sigma)(r-\delta)}{\sigma}} \; \frac{k_0 - k_T\, e^{-(r-\delta)T}}{1 - e^{\frac{(r-\delta)(1-\sigma)-\rho}{\sigma} T}} \; e^{\frac{r-\delta-\rho}{\sigma} t}$$

$$+ \; e^{(r-\delta)t} k_0 - \frac{k_0 - k_T\, e^{-(r-\delta)T}}{1 - e^{\frac{(r-\delta)(1-\sigma)-\rho}{\sigma} T}} \; e^{(r-\delta)t}$$

$$= e^{(r-\delta)t} k_0 + \frac{k_0 - k_T\, e^{-(r-\delta)T}}{1 - e^{\frac{(r-\delta)(1-\sigma)-\rho}{\sigma} T}} \left[e^{\frac{(r-\delta-\rho)}{\sigma} t} - e^{(r-\delta)t} \right]$$

$$= e^{(r-\delta)t} k_0 + \frac{k_0 - k_T\, e^{-(r-\delta)T}}{1 - e^{\frac{(r-\delta)(1-\sigma)-\rho}{\sigma} T}} \; e^{(r-\delta)t} \left[e^{\frac{(r-\delta)(1-\sigma)-\rho}{\sigma} t} - 1 \right]$$

On en déduit alors que

$k(t) > 0 \quad \forall\, r, \delta, \rho, \sigma$ pourvu que $\rho \neq (r-\delta)(1-\sigma)$.

3) Le signe de $\rho - (1-\sigma)(r-\delta)$ est a priori indéterminé.
On constate cependant que :

- $\rho - (1-\sigma)(r-\delta) > 0 \Rightarrow 1 - e^{\frac{(r-\delta)(1-\sigma)-\rho}{\sigma}T} > 0$
- $\rho - (1-\sigma)(r-\delta) < 0 \Rightarrow 1 - e^{\frac{(r-\delta)(1-\sigma)-\rho}{\sigma}T} < 0.$

On déduit donc que la solution $q(0)$ est admissible si et seulement si :

$$k_0 - k_T e^{-(r-\delta)T} > 0. \iff k_T < k_0 e^{(r-\delta)T}$$

Cela signifie que la valeur du stock terminal ne peut pas excéder le niveau qui pourrait être atteint si la consommation est toujours nulle. Il n'y a par ailleurs aucune autre condition sur les paramètres.

Pble 2 :

1) $H = \dfrac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + q\left[rk - c - \delta k\right]$

$\mathcal{L} = H + \lambda\left[rk - c\right].$

$\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial c} = c^{-\sigma} - q - \lambda = 0$

$\dot{q} = \rho q - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = \left(\rho + \delta - r\right) q - \lambda r$

$\dot{k} = (r - \delta)k - c$

$\lambda \geq 0, \quad rk - c \geq 0 \quad$ et $\quad \lambda\left[rk - c\right] = 0.$

2) Etude du cas non contraint : $rk - c \geq 0$ et $\lambda = 0$.

$$q = c^{-\sigma}$$
$$\dot{q} = (\delta + \rho - r) q$$
$$\dot{k} = (r - \delta) k - c$$

On retrouve les mêmes solutions que dans le pb 1.

Etude du cas contraint : $rk = c$ et $\lambda > 0$.

$$q + \lambda = c^{-\sigma} = (rk)^{-\sigma}$$
$$\dot{q} = (\rho + \delta) q - (\lambda + q) r = (\rho + \delta) q - r (rk)^{-\sigma}$$
$$\dot{k} = -\delta k \quad \Rightarrow \quad k(t) = k_0 e^{-\delta t}$$

Donc :

$$\dot{q} = (\rho + \delta) q - r^{1-\sigma} k_0^{-\sigma} e^{\sigma \delta t}$$

On pose alors :

$$q(t) = e^{(\delta + \rho) t} A(t)$$
$$\Rightarrow \dot{q} = (\delta + \rho) e^{(\delta + \rho) t} A(t) + e^{(\delta + \rho) t} \dot{A}(t)$$
$$= \cancel{(\delta + \rho) q} + e^{(\delta + \rho) t} \dot{A}(t) = \cancel{(\delta + \rho) q} - r^{1-\sigma} k_0^{-\sigma} e^{\sigma \delta t}$$
$$\Leftrightarrow \dot{A}(t) = - r^{1-\sigma} k_0^{-\sigma} e^{-[\rho + (1-\sigma)\delta] t}$$
$$\Rightarrow A(t) = \frac{r^{1-\sigma} k_0^{-\sigma}}{\rho + (1-\sigma)\delta} e^{-[\rho + (1-\sigma)\delta] t}$$

On déduit donc :

$$q(t) = \frac{r^{1-\sigma} k_0^{-\sigma}}{\rho + (1-\sigma)\delta} e^{-[\rho + (1-\sigma)\delta - \delta - \rho] t}$$

$$\Rightarrow \quad q(t) = \frac{r^{1-\sigma} k_0^{-\sigma}}{\rho + (1-\sigma)\delta} \quad e^{\sigma \delta t}$$

En fin on obtient:

$$c(t) = r k(t) = r k_0 e^{-\delta t}$$

3.) Dans le cas non contraint on a:

$$q = c^{-\sigma}$$

On différencie cette équation:

$$\dot{q} = -\sigma \cancel{c^{-\sigma}} \frac{\dot{c}}{c} = (\rho + \delta - r) q = (\rho + \delta - r) \cancel{c^{-\sigma}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{c} = \frac{r - \delta - \rho}{\sigma} c$$

Par ailleurs on a:

$$\dot{k} = (r - \delta) k - c$$

Isoclines:

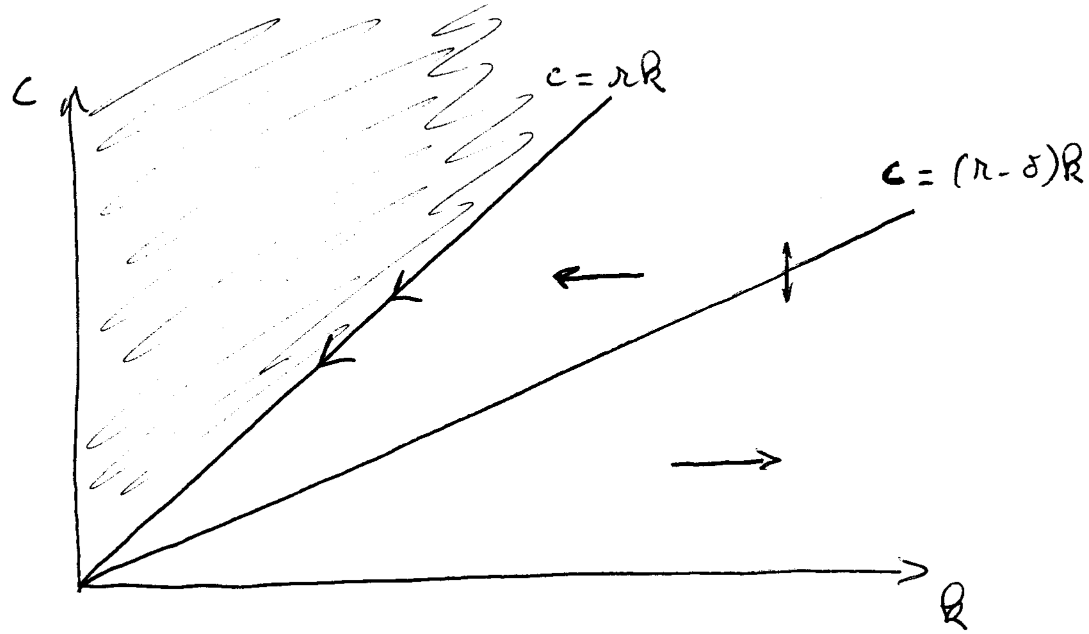
$\dot{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$ i.e. l'axe des ordonnées.

$\dot{k} = 0 \quad \Rightarrow \quad c = (r - \delta) k$.

Dans le cas contraint on a:

$$c = r k$$

$$\dot{k} = -\delta k$$



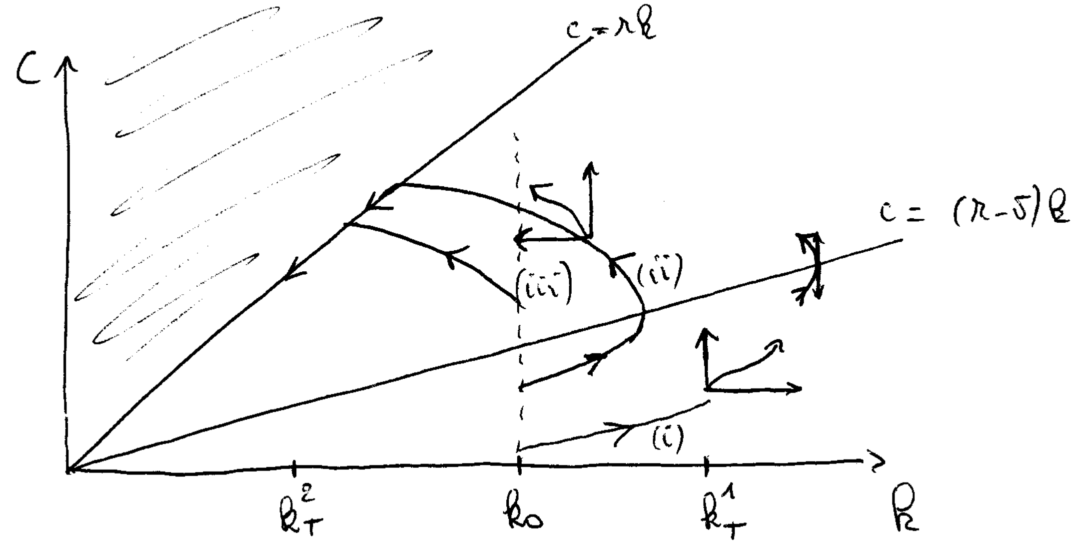
On notera que dans le cas non contraint :

$$\frac{dc}{dk} = \frac{\dot{c}}{\dot{k}}$$

de sorte que le long de l'isocline $\dot{k} = 0$ et $\frac{dc}{dk} = \infty$

On doit distinguer deux cas selon le signe de $r-\delta-\rho$:

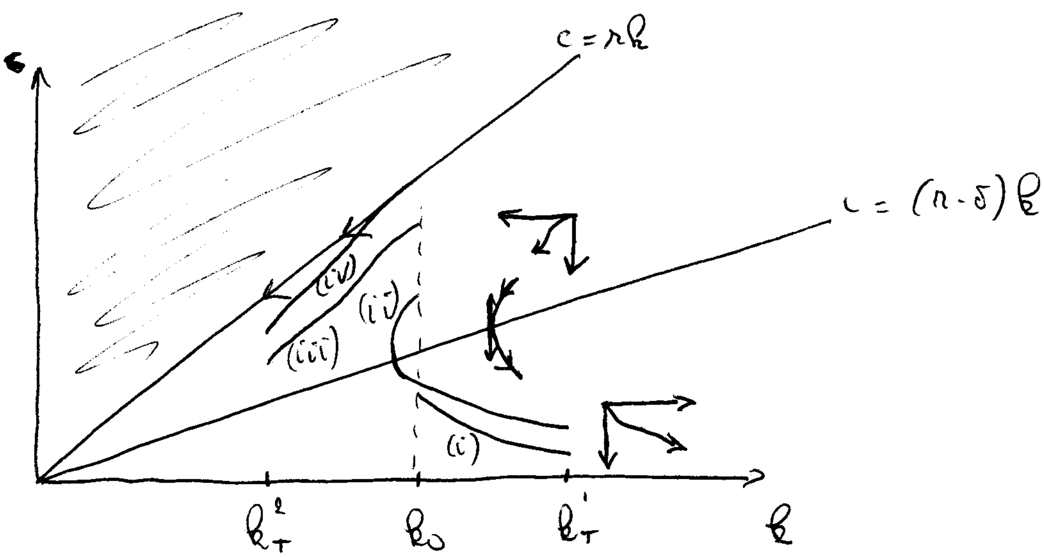
1^er cas : $r - \delta > \rho \Rightarrow \frac{\dot{c}}{c} > 0$



Selon que k_T est supérieur ou inférieur à k_0 plusieurs configurations sont possibles. L'horizon T est également important. Plusieurs types de trajectoires sont représentées. La trajectoire (i) sera obtenue si $k_T > k_0$. La contrainte n'est donc pas saturée.

Les trajectoires (ii) et (iii) correspondent aux cas $k_T < k_0$. Elles se distinguent par la valeur de T. La trajectoire (ii) sera choisie si T est suffisamment grand. On remarque que (ii) et (iii) sont associées à une contrainte saturée à partir d'un moment.

2° cas : $r - \delta < \rho \Rightarrow \frac{\dot{c}}{c} < 0$



On remarque immédiatement que dans ce cas la contrainte ne peut être saturée que si on part d'une condition initiale $c(0)$ telle que $c(0) = r k_0$. Sinon elle ne sera jamais saturée. Là encore selon que k_T est inférieur ou supérieur à k_0 plusieurs trajectoires sont possibles. Les trajectoires (ii) et (i) associées à $k_T > k_0$ se distinguent par la valeur de T. Dans le cas $k_0 > k_T$ on peut avoir une trajectoire intérieure, (iii), une trajectoire au départ contraignante puis intérieure, (iv), ou bien une trajectoire toujours contraignante. Cela dépend de T. Si T est suffisamment faible, la contrainte sera toujours saturée.

Pble 3 :

1) $H = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} + q\left[rk - c - \delta k\right]$

$\mathcal{L} = H + \lambda\left[rk - c\right]$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} = c^{-\sigma} - q - \lambda = 0$$

$$\dot{q} = \rho q - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = (\rho + \delta) q - (\lambda + q) r$$

$$\dot{k} = (r - \delta) k - c$$

$$\lambda \geq 0, \quad rk - c \geq 0, \quad \lambda\left[rk - c\right] = 0$$

$$q(T) = \alpha \beta k(T)^{\beta - 1}$$

2) Cas non contraint : $rk - c \geq 0$, $\lambda = 0$.

$$q = c^{-\sigma}$$

$$\dot{q} = (\rho + \delta - r) q$$

$$\dot{k} = (r - \delta) k - c$$

$$q(T) = \alpha \beta k(T)^{\beta - 1}.$$

On a montré dans le Pbl 1 que :

$$q(t) = q(0) e^{-(r - \delta - \rho) t}$$

$$c(t) = q(0)^{-\frac{1}{\sigma}} e^{\frac{r - \delta - \rho}{\sigma} t}$$

$$k(t) = \frac{\sigma}{\rho - (1 - \sigma)(r - \delta)} q(0)^{-\frac{1}{\sigma}} e^{\frac{r - \delta - \rho}{\sigma} t} + A e^{(r - \delta) t}$$

On déduit alors :

$$k_0 = \frac{\sigma}{\rho - (1 - \sigma)(r - \delta)} q(0)^{-\frac{1}{\sigma}} + A$$

$$k(T) = \frac{\sigma}{\rho-(1-\sigma)(r-\delta)}\, q(0)^{-\frac{1}{\sigma}}\, e^{\frac{r-\delta-\rho}{\sigma}T} + A\, e^{(r-\delta)T}$$

On sait par ailleurs que:

$$q(T) = q(0)\, e^{-(r-\delta-\rho)T} = \alpha\beta\, k(T)^{\beta-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad q(0)^{-\frac{1}{\sigma}}\, e^{\frac{r-\delta-\rho}{\sigma}T} = (\alpha\beta)^{-\frac{1}{\sigma}}\, k(T)^{\frac{1-\beta}{\sigma}}$$

On obtient ainsi:

$$k(T) = \frac{\sigma}{\rho-(1-\sigma)(r-\delta)}\, (\alpha\beta)^{-\frac{1}{\sigma}}\, k(T)^{\frac{1-\beta}{\sigma}} + A\, e^{(r-\delta)T}$$

Sachant que:

$$A = k_0 - \frac{\sigma}{\rho-(1-\sigma)(r-\delta)}\, q(0)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

$$= k_0 - \frac{\sigma}{\rho-(1-\sigma)(r-\delta)}\, (\alpha\beta)^{-\frac{1}{\sigma}}\, k(T)^{\frac{1-\beta}{\sigma}}\, e^{-\frac{r-\delta-\rho}{\sigma}T}$$

On déduit:

$$k(T) = \frac{\sigma}{\rho-(1-\sigma)(r-\delta)}\, (\alpha\beta)^{-\frac{1}{\sigma}}\, k(T)^{\frac{1-\beta}{\sigma}} + k_0\, e^{(r-\delta)T}$$

$$- \frac{\sigma}{\rho-(1-\sigma)(r-\delta)}\, (\alpha\beta)^{-\frac{1}{\sigma}}\, k(T)^{\frac{1-\beta}{\sigma}}\, e^{\frac{\rho-(1-\sigma)(r-\delta)}{\sigma}T}$$

$$\Leftrightarrow \quad k(T) - k_0\, e^{(r-\delta)T} = \frac{\sigma}{\rho-(1-\sigma)(r-\delta)}\, (\alpha\beta)^{-\frac{1}{\sigma}}\, k(T)^{\frac{1-\beta}{\sigma}} \left[1 - e^{\frac{\rho-(1-\sigma)(r-\delta)}{\sigma}T}\right]$$

$k(T)$ est donc solution de cette équation si la contrainte n'est pas saturée en T.

Cas contraint : $rk = c$, $\lambda > 0$.

$$q + \lambda = c^{-\sigma} = (rk)^{-\sigma}$$

$$\dot{q} = (\rho+\delta)q - (\lambda+q)r = (\rho+\delta)q - r(rk)^{-\sigma} \quad \text{avec } q(T) = \alpha\beta k(T)^{\beta-1}$$

$$\dot{k} = -\delta k \Rightarrow k(t) = e^{-\delta t} k_0.$$

$$c(t) = rk(t) = rk_0 e^{-\delta t}$$

On a montré dans le ptle 2 que :

$$q(t) = \frac{r^{1-\sigma} k_0^{-\sigma}}{\rho + (1-\sigma)\delta} e^{\sigma\delta t}$$

$$\Rightarrow q(T) = \frac{r^{1-\sigma} k_0^{-\sigma}}{\rho + (1-\sigma)\delta} e^{\sigma\delta T} = \alpha\beta\, k(T)^{\beta-1}$$

$$\Rightarrow k(T) = \left[\frac{r^{1-\sigma} k_0^{-\sigma}}{\rho + (1-\sigma)\delta} \frac{e^{\sigma\delta T}}{\alpha\beta}\right]^{\frac{1}{\beta-1}}$$

3.) Lorsque $\alpha = 0$ la condition de transversalité devient $q(T) = 0$.

On doit définir le système dynamique en $(\dot{k}, \dot{q})$. On a dans le cas non contraint :

$$q = c^{-\sigma} \Leftrightarrow c = q^{-1/\sigma}$$

$$\dot{q} = (\rho + \delta - r)q$$

$$\dot{k} = (r-\delta)k - q^{-1/\sigma}$$

Isoclines :

$\dot{q} = 0 \Rightarrow q = 0$ i.e. l'axe des abscisses.

$\dot{k} = 0 \Rightarrow q = [(r-\delta)k]^{-\sigma}$

Dans le cas contraint on a :

$$rk = c$$

$$q + \lambda = c^{-\sigma} = (rk)^{-\sigma}$$

$$\dot{q} = (\rho + \delta) q - r^{1-\sigma} k^{-\sigma}$$

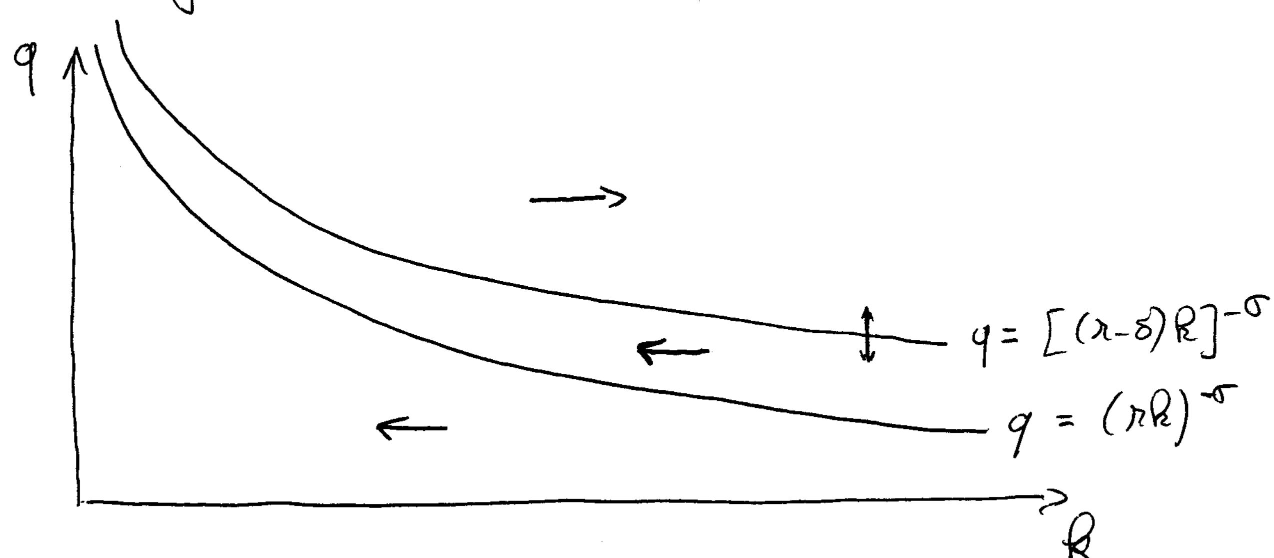
L'isocline $\dot{q} = 0$ devient donc dans le cas contraint :

$$q = \frac{r^{1-\sigma}}{\rho + \delta} k^{-\sigma} = \frac{r}{\rho + \delta} (rk)^{-\sigma}$$

A la frontière des 2 cas on a $rk = c$ et $\lambda = 0$ de sorte que :

$$rk = q^{-1/\sigma} \iff q = (rk)^{-\sigma}$$

Le diagramme des phases se présente donc comme suit :



On doit distinguer 2 cas selon le signe de $r - \rho - \delta$:

- si $r > \rho + \delta$ on a

$$\frac{r}{\rho + \delta} (rk)^{-\sigma} > (rk)^{-\sigma}$$

de sorte que dans la zone où la contrainte est active, i.e. lorsque $q < (rk)^{-\sigma}$ on a toujours $\dot{q} < 0$. Il en va de même dans la zone où la contrainte est inactive puisque $\dot{q} = (\rho + \delta - r) q < 0$.

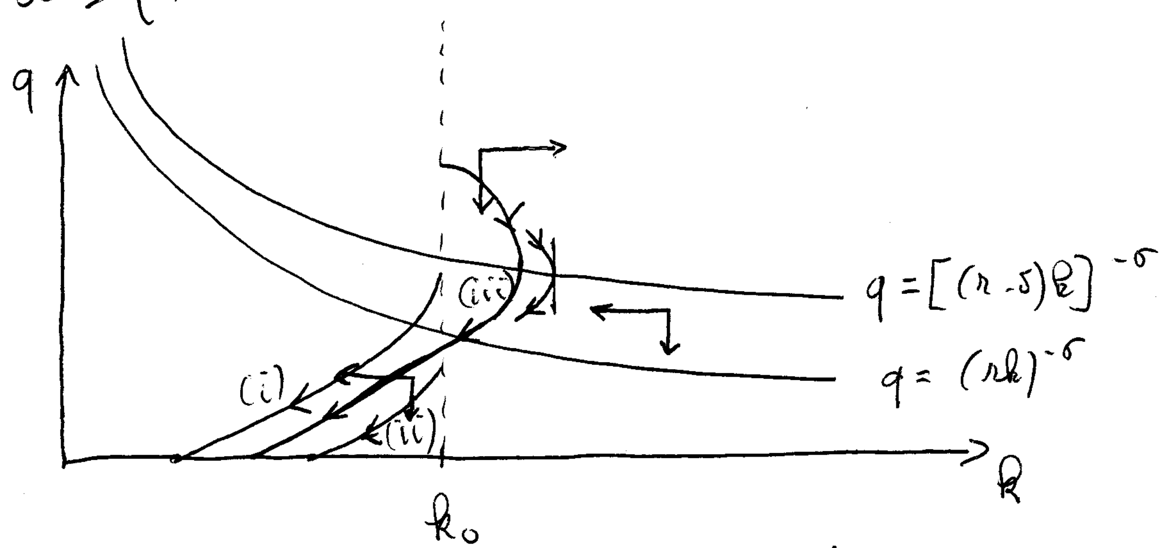
• si $r < \rho + \delta$ on a

$$\frac{r}{\rho+\delta}(rk)^{-\sigma} < (rk)^{-\sigma}$$

On sait que l'isocline $q = \frac{r}{\rho+\delta}(rk)^{-\sigma}$ se trouve dans la zone où la contrainte est active. Selon que q est supérieur ou inférieur à $\frac{r}{\rho+\delta}(rk)^{-\sigma}$ on aura donc respectivement $\dot q > 0$ ou $\dot q < 0$. Dans le cas non contraint on a au contraire $\dot q = (\rho+\delta-r)q > 0$.

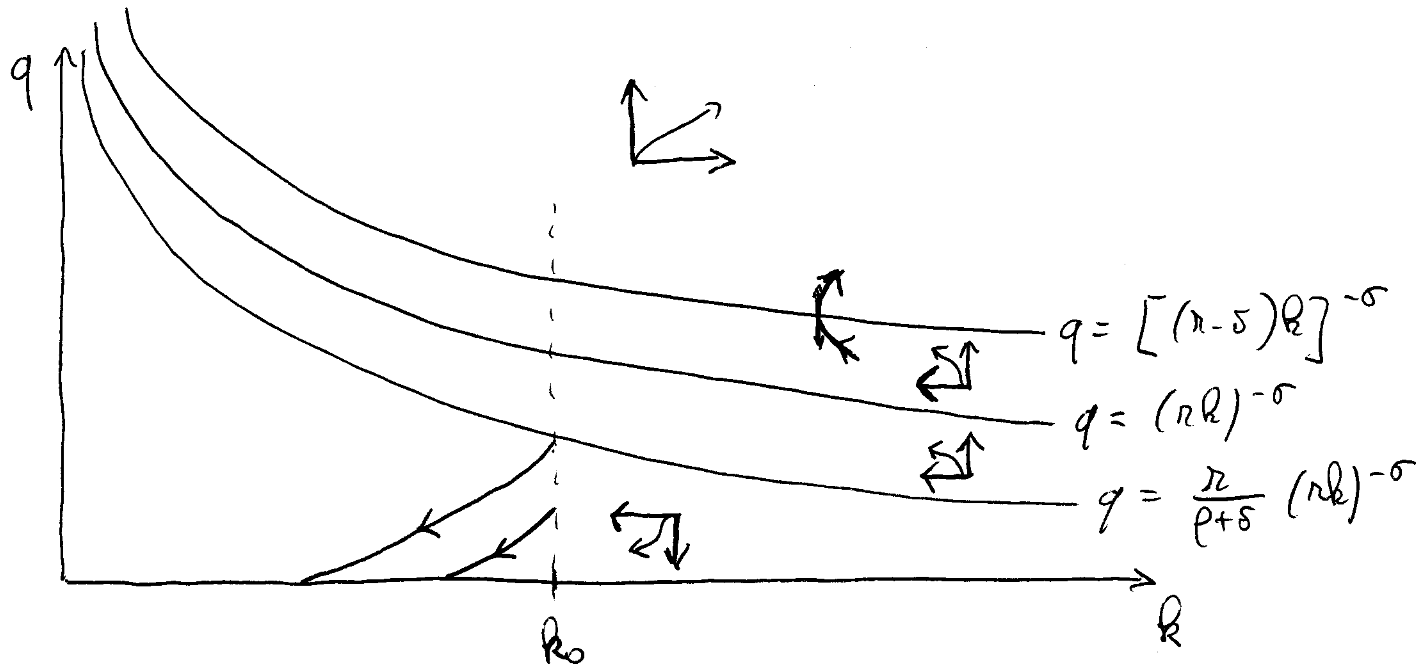
Représentons les espaces de phases dans ces 2 cas :

• $r > \rho + \delta$



Selon l'horizon T on aura plusieurs types de trajectoires possibles, telles que (i), (ii) ou (iii). Notons que la trajectoire (iii) est associée à une contrainte toujours active. Puisque $q(T) = 0$ on sait que la contrainte doit obligatoirement être active à partir d'un instant $\bar t$ et ce jusqu'à la fin de l'horizon T.

• $r < \rho + \delta$



Puisque $q(T) = 0$ la trajectoire optimale sera nécessairement complètement incluse dans la zone contrainte, et plus précisément $q(0)$ devra être choisi en dessous de l'isocline $q = \frac{r}{\rho+\delta}(rk)^{-\sigma}$. Il se peut donc si T est trop grand qu'il n'existe pas de trajectoire solution du problème.